Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 54(2), 2025, 497-540
https://dergipark.org.tr/tr/pub/cuefd

Identifying Middle School Students' Understandings of Length Measurement and Fractions*

Fatma Nur ÖZTÜRK [a] (ORCID ID - 0000-0003-2698-5162)
Nejla GÜREFE [b*] (ORCID ID - 0000-0002-0705-0890)
[a]Ministry of Education, Samsun/Türkiye
[b] Mersin University, Faculty of Education, Mersin/Türkiye

Article Info

DOI: 10.14812/cuefd.1412922

Article history:
Received 01.01.24
Revised 25.03.25
Accepted 11.07.25

Keywords:
Fraction,
Fraction Models,
Length Measurement,
Middle School Students.

Research Article

Abstract

This study aimed to elucidate the understanding of length measurement and fractions among middle school students. Designed as a case study, the research involved nine students from 6th, 7th, and 8th grades. Data collected through one-on-one interviews were analyzed using descriptive analysis. The findings revealed that participants' comprehension of fractions and length measurement predominantly fell within the pre-interiorization profile, encompassing pre-interiorization, interiorization, condensation, and reification profiles. Essentially, students were found to generally encounter difficulties in comprehending both fractions and length measurements. Furthermore, it was noted that students employed diverse strategies and methods, such as notch counting, dot counting, and intervals, when presented with fraction length models in various formats. They consistently demonstrated distinct understandings in response to each question, emphasizing the practicality of student answers in unveiling their comprehension of fractions and length measurement. Based on the research results, it can be recommended that mathematics teachers should address the basic concepts of fractions and their models more thoroughly in classroom practices. It may be recommended that teachers address the basic concepts and models related to fractions in more detail in their classroom practices.

Ortaokul Öğrencilerinin Uzunluk Ölçme ve Kesir Anlayışlarının Belirlenmesi

Makale Bilgisi

DOI: 10.14812/cuefd.1412922

Makale Geçmişi:
Geliş 01.01.24
Düzeltme 25.03.25
Kabul 11.07.25

Anahtar Kelimeler:
Kesir,
Kesir Modelleri,
Uzunluk Ölçme,
Ortaokul Öğrencileri.

Araştırma Makalesi

Öz

Bu çalışma, ortaokul öğrencilerinin uzunluk ölçme ve kesir konularındaki anlayışlarını derinlemesine incelemeyi amaçlamıştır. Nitel bir yaklaşımla, durum çalışması şeklinde tasarlanan bu araştırma, 6, 7 ve 8. sınıflardan amaçlı örnekleme yoluyla seçilen toplam dokuz öğrenci ile yürütülmüştür. Veriler, birebir gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla toplanmış ve elde edilen veriler betimsel analiz yöntemi kullanılarak çözümlenmiştir. Araştırmanın bulguları, katılımcı öğrencilerin kesir ve uzunluk ölçme konularındaki anlayışlarının büyük ölçüde "ön içselleştirme" profiline ait olduğunu göstermiştir. Bu da, öğrencilerin genellikle hem kesir hem de uzunluk ölçme kavramlarını anlamada belirgin zorluklar yaşadığını ortaya koymuştur. Ayrıca öğrencilerin farklı kesir uzunluk modellerinde çentik sayma, nokta belirleme, aralık sayma gibi çeşitli stratejiler ve yöntemlerden faydalandıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin her görevde farklı anlayışlar sergiledikleri ve verdikleri yanıtların, kavramsal anlayışlarını anlamada önemli ipuçları sunduğu gözlemlenmiştir. Araştırma bulguları doğrultusunda, öğretmenlerin kesir ve uzunluk ölçme konularını öğretirken öğrencilerin kavramsal gelişim düzeylerini dikkate almaları önem arz etmektedir. Öğretmenlerinin sınıf uygulamalarında kesirlerle ilgili temel kavramları ve modellerini daha detaylı ele almaları önerilebilir.

*This study is a part of the master's thesis written by the first author under the supervision of the second author.

***Corresponding Author:** nejlagurefe@mersin.edu.tr

Introduction

Fraction concepts stand out as one of the most intricate mathematical ideas that students grapple with during their primary school years (Newstead & Murray, 1998). Although students encounter fractions in daily life (Charalambous & Pantazi, 2005), understanding fractions can be challenging for many people to understand because it is the first abstract concept they learn after natural numbers (Behr et al., 1993). In addition, understanding fractions is important as it forms the basis of many advanced mathematics subjects (Özdemir & Özçakır, 2019). Van de Walle et al. (2013) expressed this situation as follows: "Comprehension of fractions is a critical and fundamental issue for students, therefore one should go far beyond scanning 4/7 of a region and perceiving this situation." To understand fractions, it is necessary to make sense of the concept of fractions with the help of representations and models (Duval, 1993). There are many studies suggesting that visuals and models are used effectively in teaching fractions and make them easier to understand (Cramer & Henry, 2002; Siebert & Gaskin, 2006; Van de Walle et al., 2013). It is recommended to use area models, length models, and set models, which have the quality of representing fractions, for teaching fractions. The models with the attribute of length are those where fractions are represented by lengths such as bars, line segments, number lines, or rulers. These models are predominantly used in overseas school curricula (Van de Walle et al., 2013), and in our country's school curricula, the number line is more commonly used for the length model (MEB, 2018). Models with the attribute of length effectively illustrate the essence of the part-whole concept in fractions and the proportional size of the part to the whole. When employing this model, it is advisable to begin with the use of sticks, pieces of string, and shapes cut from cardboard, progressing to line pieces, and ultimately incorporating the number line (Baykul, 2006). After using these types of visual tools, it will be more effective to teach the representation of fractions on the number line, their distance from zero, and their relative sizes compared to other numbers (Olkun & Toluk Uçar, 2007). After using these types of visual tools, it will be more effective to teach the representation of fractions on the number line, their distance from zero, and their relative sizes compared to other numbers (Olkun & Toluk Uçar, 2007).

Each of the basic concepts such as whole for fraction, equal division, part-whole relationship, units for geometric measurement, attribute, and additivity (Lehrer, 2003) has multiple structures within itself. The concept of length measurement is the first concept that students encounter regarding measurement in primary school (MEB, 2015). The concept of length measurement is very important since it is the first concept related to measurement that students encounter and forms the basis for understanding fundamental ideas of measurement, providing a foundation for more advanced concepts such as area and volume (Outhred & McPhail, 2000; Stephan & Clements, 2003). It is also thought that the field of measurement learning lays the groundwork for the development of mathematical concepts such as the concept of fractions, decimal notation, ratios, and rational numbers (NCTM, 2006). Several researchers have asserted that students harbor misconceptions about the concept of length measurement that persist until the 8th grade (Kayhan & Argün, 2014) and that students, especially in primary school, count lines, numbers, and points when measuring length (Barrett et al., 2003). These methods, developed by students themselves and lacking scientific validity, have been described in numerous studies (Stephan & Clements, 2003; Van de Walle et al., 2013; Zembat, 2009). For example, some other misconceptions or misunderstandings related to measurement found in the literature include leaving gaps when repeating a unit of measure, placing a finger between each repetition of the unit, not paying attention to the starting and ending points of each repetition, encountering problems when directly comparing the lengths of objects positioned at different alignments, experiencing difficulties in comparing the lengths of two non-linear objects, and expressing the measurement result in cm or m regardless of the unit of measure used. This shows that students cannot conceptually learn length measurement and therefore may have difficulties in other learning areas. For this reason, it is important to teach the concept of length.

Indeed, when the literature on area is examined, many researchers (Hackenberg & Lee, 2015; Van de Walle et al., 2013) express that understanding fraction measurement interpretation contributes to understanding the quantitative aspects of fractions. The essence of measuring in a fraction arises when

evaluating a length relative to another predetermined length, necessitating the determination of a length and subsequently employing that length as a measuring tool (Van de Walle et al., 2013). It can be said that the concept of fractions also originates from the act of measurement. While the measuring tool is accepted as the unit, the measurement result is expressed in terms of the unit using natural numbers (Saymaz & Argün, 2022). However, although natural numbers are sufficient for counting discrete quantities (magnitudes), the idea of more accurate and precise measurement of continuous quantities (magnitudes) such as length, time, and volume, and the idea of subdividing the unit of measurement into smaller parts (rescaling the unit), leads to the emergence of the concept of fractions (Barnett-Clarke et al., 2010; Simon et al., 2018; Wijaya, 2017). For instance, in the fraction 4/5, one can count and measure the fraction 1/5, expressing that four fractions of 1/5 are required to form the fraction 4/5, effectively treating the fraction 1/5 as a measuring tool (Van de Walle, 2013). The foundation of the measurement concept lies in representing a fraction as a length on a number line (Chapin & Johnson, 2006). Numerous studies (Hackenberg & Lee, 2015; Lee, 2017; Lee ve Hackenberg, 2014; Steffe & Olive, 2010; Van de Walle et al., 2013) addressing challenges in representing fractions on the number line suggest that students can develop a more profound understanding of fractions by initially learning them through a measurement-based approach, rather than solely relying on the part-whole interpretation. The measurement interpretation aids students in the quantitative evaluation of fractions (Hackenberg & Lee, 2015; Olive & Steffe, 2010).

In his research on fraction length models, Mitchell (2011) stated that students used a combination of fraction and length measurement concepts when solving length model problems. Literature review reveals studies examining various aspects of fractions, including the ability to use geometric models for fractions (Topçu & Gürefe, 2020); views of primary school teachers on different meanings and models of fractions (Toptaş, Han & Akın, 2017); students' fraction modeling skills (Çelik & Çiltaş, 2015); students' skills in formulating and solving problems suitable for fraction models (Kavuncu & Yenilmez, 2021); misconceptions and learning difficulties in the number line topic (Pesen, 2008); assessment of model usage skills in teaching basic fraction concepts to inclusive students (Yakar, 2019). Additionally, studies abroad have investigated fraction area models (Mitchell & Horne, 2008), examination of area and length models using Kieren's four three four model (Mitchell, 2011), and research on misconceptions in number line tasks (Mitchell & Horne, 2008; Patahuddin, Usman & Ramful, 2017). Moreover, it is notable that Sfard's theory (1991), which we used in this study, is generally applied in theoretical studies and less in practice-based studies, suggesting a potential contribution of this study to mathematics education. Working with fraction-length models not only ensures a solid understanding of concepts but also requires the ability to connect relevant concepts to form a complete understanding (Hodges et al., 2008; Lee & Lee, 2020). Since it is believed that students use both fraction knowledge and geometric measurement knowledge while solving fraction problems presented with length models, in this study, students were asked to solve problems involving differently presented length models to examine their knowledge and reasoning regarding fraction length models, as well as to express the strategies and reasoning they used during this process. The research aims to reveal students' understanding of length measurement and fractions by presenting questions in different formats, including the number line, unnumbered empty number line, broken ruler, and length models on geometric shapes. Additionally, the study aims to uncover how students utilize their understanding of length measurement when determining fractions.

Conceptual Framework

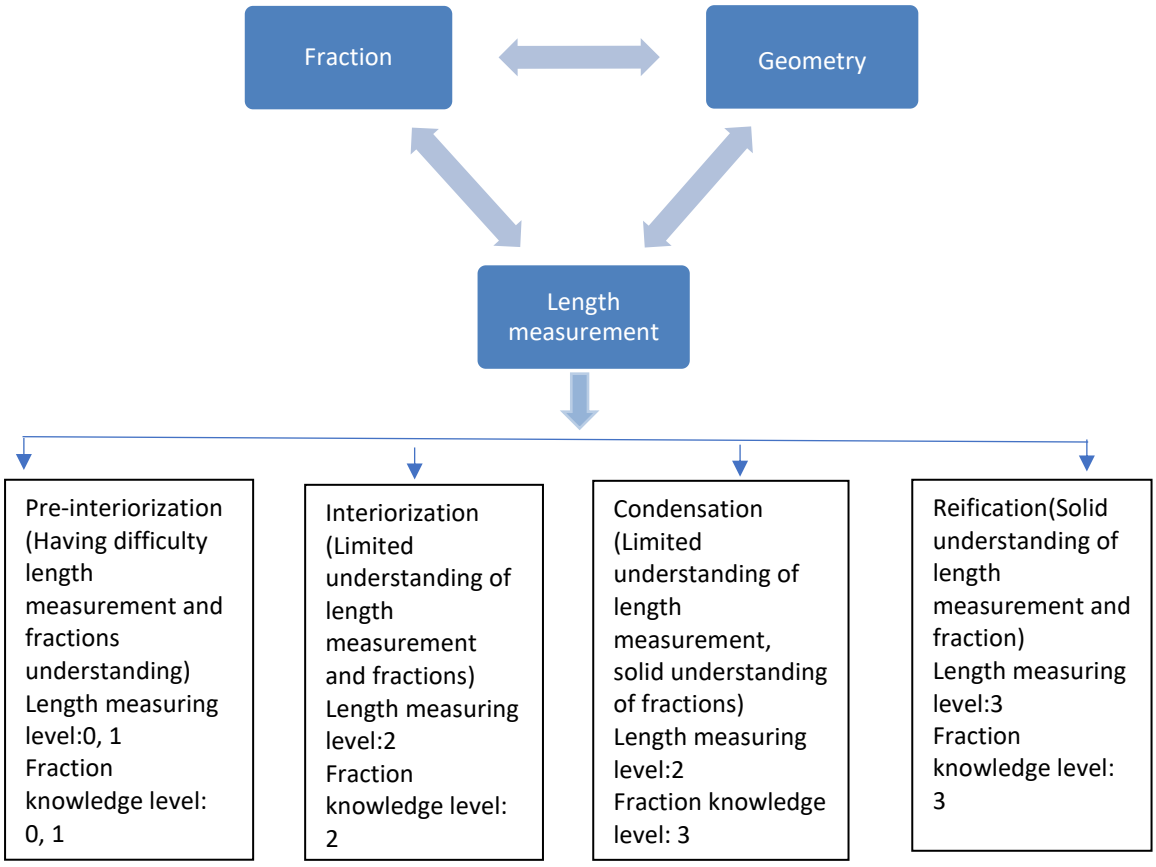
Sfard (1991) proposed a theoretical framework outlining the progression from operational to conceptual understanding in the acquisition of mathematical concepts. According to his model, operational understanding precedes structural understanding, with students initially engaging with physical models, progressing to pictorial representations, and ultimately working exclusively with symbols. Sfard (1991) delineates the process from operational understanding to a structural understanding in three stages: interiorization, condensation, and re-introduction. During the interiorization stage, students undergo a process involving familiar objects, introducing procedures that will eventually lead to the development of a new concept. In the condensation stage, students gain the

ability to conceptualize a process as a whole without delving into details, involving a fluid transition between different representations of the concept. Finally, in the reification stage, students achieve a comprehensive grasp of the concept as an object and can solve problems encompassing all instances meeting specific conditions. This stage marks the commencement of the interiorization of higher-level concepts.

Sfard's continuity in concept formation process provides a context to observe students' ability to connect their understanding of geometric measurement and fractions (Lee & Lee, 2020). Lee and Lee (2020), considering Sfard's (1991) theory, added the pre-internalization stage to this model to determine students' understanding of geometric measurement in problems involving fraction area models, expressing this process in four stages: Profile 1 (Pre-internalization), Profile 2 (Internalization), Profile 3 (Condensation), and Profile 4 (Reconstruction). The model not only involves representing the fraction area model on a geometric shape but also encompasses using fundamental concepts of fractions, such as equal partitioning and the part-whole relationship, while determining the area of each shape. Thus, these profiles include observations concerning students' geometric measurement and fraction knowledge (Lee & Lee, 2020). In the present study, unlike Lee and Lee's (2020) work, the profiles regarding area measurement have been adapted for length measurement. These profiles are presented in Figure 1.

Figure 1

Profiles Showing Students' Understanding of Length Measurement and Fractions



Knowledge levels regarding length measurement and fraction understanding are shown in Table 1.

Table 1
Length Measurement and Fraction Understanding

Levels	Length/fraction	Explanations about levels	Examples of levels
Level 0	Length	*Not recognizing the length measuring unit	… a student who determines the length by only counting the notches on a given ruler and cannot determine what the unit is does not recognize the unit of measurement of length.
	Fraction	*Not being aware of whole and equal parts,	… when an object is divided into parts, it is not known what the whole is and whether the resulting parts are identical.
Level 1	Length	* Ability to determine the amount of length without specifying what the unit of length is	… the student does not know that the unit of length is m, cm, mm, etc.
	Fraction	* Awareness of equal division with limited understanding	… it is known that the intervals are equal, the number of notches on the line segment is equal, and one of the two segments should not appear larger than the other segment.
Level 2	Length	*They know what the unit of length is, but when determining the quantity of length that cannot be expressed in natural numbers, they rely on estimation-based counting.	… when determining the length measurement, it accurately counts the complete lengths, while it makes an estimated measurement by combining the parts of partial lengths.
	Fraction	*Awareness of equal parts without mentioning the part-whole relationship	..For example, the comparison of the number of intervals is made without considering the relationship between the length of the whole and the length of each part belonging to the whole.
Level 3	Length	* Preferring to use specific	… when determining the

	formulas when measuring length	perimeter of a square, the student multiplies the length of one side by four.
Fraction	*The quantity of the whole, the concept of equal parts, and the interconnection between the parts and the whole are well-established	… the student can determine the length of the perimeter of a square, determine the relationship between the side lengths, and determine the relationship between each side length and the perimeter as a fraction.

All this information provides us with insights into students' understanding of length measurement and fractions. This study will examine students' comprehension of length measurement and fractions, revealing how they use length measurement when determining fractions.

Method

Research Model

The research employed the case study method, which is a qualitative research design. Case studies are an approach in which a limited system is examined and described in detail and in depth through multiple information sources (Creswell, 2018). This study is a case study as it aims to examine students in detail and in depth to reveal their understanding of length measurement and fractions. To achieve this goal, as part of the research, student answers to the questions prepared with reference to Lee and Lee's (2020) categories and Sfard's (1991) theory were evaluated as a situation.

Participants

The study group consists of a total of 9 students, 3 each from sixth, seventh and eighth grades in a middle school in Samsun in the 2021-2022 academic year. The reason for selecting this public school in the research is that the school administration supports conducting research, the students are willing to participate, the researcher can easily access the school, and the study can be conducted smoothly. Participants consist of nine students selected through maximum diversity sampling method. These participants include 3 eighth-grade, 3 seventh-grade, and 3 sixth-grade students studying in the same classes at a public middle school. Purposive sampling method was used in selecting the students. Non-random purposive sampling involves selecting individuals who are believed to possess the desired information based on the research purpose (Frankel & Wallen, 2006). Based on the principle of maximum diversity, students from different grade levels, teachers, and school administrators were consulted. Students who volunteered to participate in the study were selected from each grade level based on their past year's mathematics grades, teacher assessments, and preliminary interviews with students, aiming to include students at high, medium, and low achievement levels in each grade level. Additionally, students were selected at these grade levels since they had previously learned about length measurement and fraction concepts in primary school in the 5th grade and were deemed to have a certain level of knowledge about the research topic. The reason for using this strategy is to determine if there is a common situation among diverse situations and to present the problem from different perspectives (Creswell, 2005). The researcher chose a school where teachers and students who could be easily accessed and contacted were present. Participants were assigned code names based on their achievement levels, with codes such as H-High, M-Medium, and L-Low, denoted as H-S1, M-S2, L-S3, and so on. Participants coded as H-S1, M-S2, L-S3 were eighth-grade students, those coded as H-S4, M-S5, L-S6 were seventh-grade students, and those coded as H-S7, M-S8, L-S9 were sixth-grade students.

Data Collection Tool and Process

The data in the study were obtained through semi-structured interviews and examination of notes taken by students during the interviews. Shapes and operations drawn by students on paper were also photographed and added to the study. Semi-structured interviews have both advantages and disadvantages; although they may not cover a broad enough sample to reach general conclusions (Adams, 2015), they allow for a deep understanding of individual thoughts through open-ended and exploratory questions (Adams, 2015). The aim of this research was not to draw general conclusions about students' perceptions but rather to determine how students with specific experiences perceive the studied topic. Our goal is to reveal the perceptions of students who have experienced fraction and length measurement concepts in primary school and in the 5th grade in previous years. The interviews were conducted with students individually, in sessions lasting 30 minutes each, and recorded with a video camera.

The research conducted a literature review to determine students' understanding of length measurement and fraction concepts. Length measurement, models representing fraction lengths, and number line questions were examined to create length model questions. Thus, questions were created to reveal and integrate basic concepts such as equal division and part-whole relationship for fractions, and units, attributes, and additivity for measurement. An example question is provided in Figure 2.

Figure 2

An Example Question

Aşağıda verilen numaralandırılmamış boş sayı doğrusu üzerinde $\frac{10}{6}$ cm' lik uzunluğu gösteriniz.

As seen in the example question in Figure 2, students are expected to represent a length of 10/6 cm on a given empty number line. In this representation, students are expected to express the part-whole relationship, determine the starting point of the number line, divide the determined lengths equally, and identify the units.

While preparing the questions, attention was paid to include various models with the attribute of length such as rulers, broken rulers, unnumbered empty number lines, measuring length on triangular square and rectangular geometric shapes. For content validity, the opinions of instructors who are experts in the field of mathematics education were taken and the necessary adjustments were made to the questions. The last form used in the study used 6 questions.

Data analysis

In the research, video recordings of one-on-one interviews with students were transcribed and recorded regularly in the file along with the solutions and figures found in the documents. For the analysis, the levels determined by Lee and Lee (2020) according to Sfard's theory were taken into account, and unlike Lee and Lee's (2020) study, the length model was also included in the measurement and fraction representation by the researchers and adapted profiles were used and the answers were placed in profiles appropriate to the levels. In the analysis of the questions regarding the length model, unlike Lee and Lee's (2020) study, the researchers included the length model in measurement and fraction representation and adapted profiles were used. Student answers were examined and firstly, the levels in the length and fraction questions (Level 0, Level 1, Level 2 and Level 3) were determined, and according to these levels, the profiles of the students (Profile 1, Profile 2, Profile 3 and Profile 4) were determined.

Profiles and levels were determined through a sample analysis as follows: Students were asked to determine the length of a pencil on a ruler provided, starting from point 1 and ending at 5.7. Students were expected to notice the starting point, correctly identify the unit of length, and express the length of the pencil as a fraction. For example, the 7th grade student with the code O-Ö5 counted only the lines on the ruler without paying attention to the starting point, and instead of expressing the length as 4 and 7 tenths, they stated it as 12. The fact that the student found the length by simply counting the notches is associated with a level 0 in length measurement. Additionally, the student's lack of attention to the whole in fractions, disregard for the part-whole relationship, and inability to express the length as a fraction indicated a level 0 in fraction knowledge. Therefore, the student's profile was evaluated as Profile 1 in this question.

The researcher provided a detailed description of the entire process of the study, including where and when the study was conducted, the characteristics of the participants, the criteria considered while selecting participants, the data collection tools, and the data analysis. In other words, the researcher provided a comprehensive narrative about the entire research process. In this study, it is believed that having an expert familiar with the research examine the study and the credibility of the data being collected through methods such as one-on-one interviews, video recordings, and reviewing notes taken by students during interviews enhances the credibility. To ensure the reliability of coding, the researcher involved an expert in the field of mathematics to review the data and verify the coding reliability. In order to ensure consistency in the researcher's interpretations, participants were provided with the data obtained from the interviews to read and their feedback was incorporated. Additionally, any parts that were not approved by the participants were excluded from the research. Furthermore, according to Miles and Huberman (1994), the transferability of a study can be enhanced by purposeful sampling of the sample. In this study, purposive sampling method was used in selecting the participants. The consistency of coding conducted by the researcher and the expert was calculated as 90% (Miles and Huberman, 1994). Categories with differing opinions and consensus were discussed, and necessary adjustments were made during the analysis. To increase reliability in the study, the analyzed data were re-evaluated at different times to ensure consistency between the two analyses.

Results

In this segment, themes identified through analysis and aligned with the research objectives are presented. The primary goal of the study is to elucidate the understanding of length and fractions among middle school students. Through analysis, four main themes, including themes related to both length and fraction understandings, and sub-themes under these themes were identified. These themes are Profile 1, Profile 2, Profile 3 and Profile 4. Profile 1 stands for Pre-interiorization, Profile 2 stands for Interiorization, Profile 3 stands for Condensation and Profile 4 stands for Reification. The students in these profiles are presented in Table 2.

Table 2

Profiles and Related Students

Profiles	**Students in the Relevant Profile**
Profile 1 (Pre-interiorization)	L-S3 (8th grade)
	M-S5 (7th grade)
	L-S6 (7th grade)
	M-S8 (6th grade)
Profile 2 (Interiorization)	M-S5 (7th grade)
	L-S9 (6th grade)
Profile 3 (Condensation)	M-S2 (8th grade)

	L-S3 (8th grade)
	L-S6 (7th grade)
Profile 4 (Reification)	G-S1 (8th grade)
	M-S2 (8th grade)
	G-S4 (7th grade)
	G-S7 (6th grade)
	M-S8 (6th grade)
	L-S9 (6th grade)

The findings regarding the profiles mentioned above are discussed in the following sections.

1. Findings regarding Profile 1 (Pre-interiorization)

It can be said that the length measurement and fraction knowledge levels of the students in this category vary between 0 and 1, and they have difficulty understanding fractions and length measurement. In other words, it was observed that the students did not know the unit in length measurement or stated the length amount without specifying the length measurement unit, did not know that equal partitioning was made in a fraction, and were not aware of the part-whole relationship. In this category, students coded L-S3, M-S5, L-S6 and M-S8 from different grade levels were included. Students coded L-S3, M-S5 and L-S6 were at the Profile 1 level in 5 of the 6 questions regarding the length model, while the student coded M-S8 was at the Profile 1 level in 3 questions and at the Profile 4 level in 3 questions. Considering these features, some subcategories such as "Notch Counting" and "Dot Counting" have been determined under this category. Additionally, at this profile level, for instance, the responses of the student coded O-Ö8 were re-examined since this situation drew attention, and it was observed that the student coded O-Ö8 was at Profile 1 in counting notches in number line and ruler questions, while at Profile 4 in length model questions given with geometric shapes. This situation can be explained by the student's reliance on rote knowledge when measuring length with geometric shapes, while struggling to determine the unit and conceptualize length measurement on the number line representation.

1.1. Notch Counting

The fact that students in this subcategory consider the notches as the unit of measurement for length instead of the distance between two lines indicates that they do not recognize the unit of length measurement. In this category, students coded L-S3, M-S5, L-S6, M-S8 were included in this category.

In the given ruler question, the student coded L-S3 was able to express the length in decimal terms, albeit limited, by not paying attention to the starting point, and used units such as m, cm, mm correctly. In contrast, when given an unnumbered empty number line, the notch tended to count.

In the interview, the fact that the student did not count the notches on the ruler but did count them on the blank number line suggests that they do not actually understand the unit. The student also had difficulty in dividing equal parts and expressing the whole in a fraction and could not place the fractions in appropriate intervals. The dialogue between the student and the researcher during this process is as follows:

L-S3: Since I will put it in 6, I will not put the ones in between. 1, 2, 3, 4, 5, 6 are here.

Researcher: Did you put 10 lines next to 6 and write 10/6 above 10?

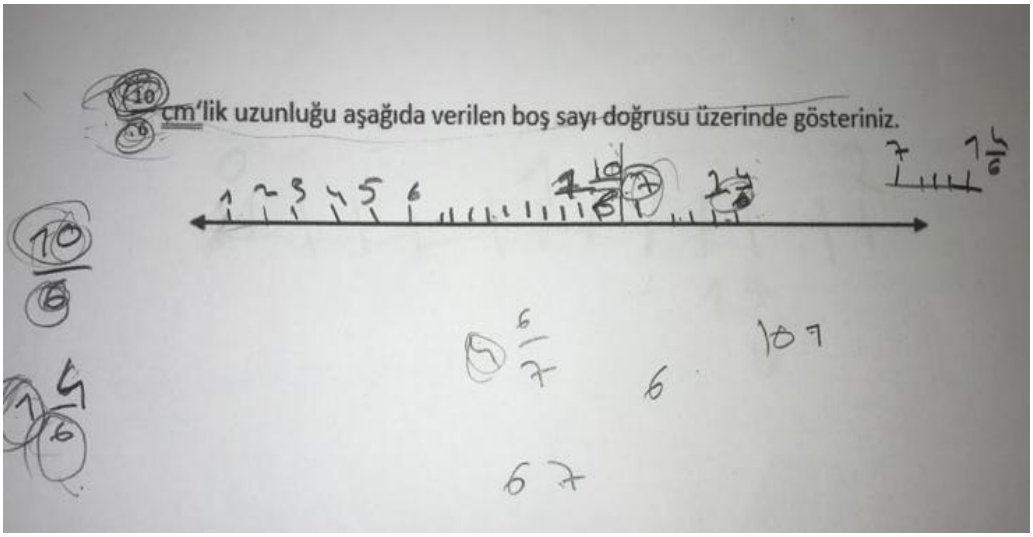
L-S3: Yes, won't it be like that?

Researcher: Where exactly does 7 occur in this case?

L-S3: That happens right here. (He put another line next to the last line he put in Figure 3 and showed it there.)

Figure 3

Answer of the Student Coded L-S3

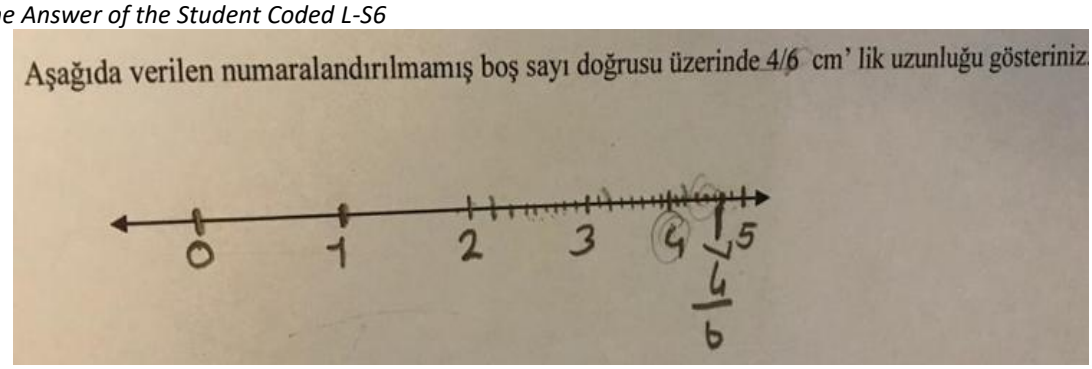


This student's level of success is low and his length measurement and fraction knowledge levels are 0. The student showed that he did not recognize the unit of length by counting the notches on the number line he created. In addition, although the student wrote the fraction on paper, he also wrote it on the other hand and showed the compound fraction 10/6 as between 6 and 7 as the denominator was 6, and since the numerator was 10, he divided the interval between 6 and 7 into 10 parts (See Figure 3). This situation showed that the student's fraction understanding level was 0. In other words, unfortunately, the student could not express the amount of the whole, equal parts and the starting point in the fraction. This situation showed that the student coded L-S3 did not fully understand length and fractions.

The student coded M-S5 could not express what the whole was and what the fraction was, and tried to determine the length by counting the notches in the given length. Thus, in unnumbered blank number line questions, he showed that he was not aware of how many parts he should divide, the whole, or the fraction. The student tended to think of the given numbers as natural numbers rather than fractions and to write and mark them randomly on the number line. This showed that the student's length measurement level and fraction understanding level were 0. The student coded L-S6 tended to count only the notches, similar to the student coded M-S5. While showing 4/6 in the blank number line questions given, he made 10 notches between 4 and 5 and marked the sixth notch. When asked why he divided the interval by 10, he stated that it is not necessary to divide by ten, but that he could divide by any number more than 6. This situation showed that the student did not know concepts related to fractions such as equal division and part-whole knowledge. From the student's answers, the length measurement knowledge level and fraction knowledge level were determined as 0. The drawing and answer of the student coded L-S6 is as follows (See Figure 4):

Figure 4

The Answer of the Student Coded L-S6



L-S6: There are 10 equal parts among them.

Researcher: Why are there 10 pieces?

L-S6: 4 will go to 4/6. Then we will divide the distance by 10.

Researcher: Why did you divide the distance by 10?

L-S6: It doesn't have to be 10, actually we'll go with 6, it has to be bigger than 6.

Researcher: How so?

L-S6: I have to go 6 times, 4 after the deadline.

Researcher: Yes.

L-S6: When I divide the distance by more than 6, I mark 6.

L-S6: Let's divide by 7, for example. (He puts 7 lines in between. He marks the 6th line.) This is 4/6.

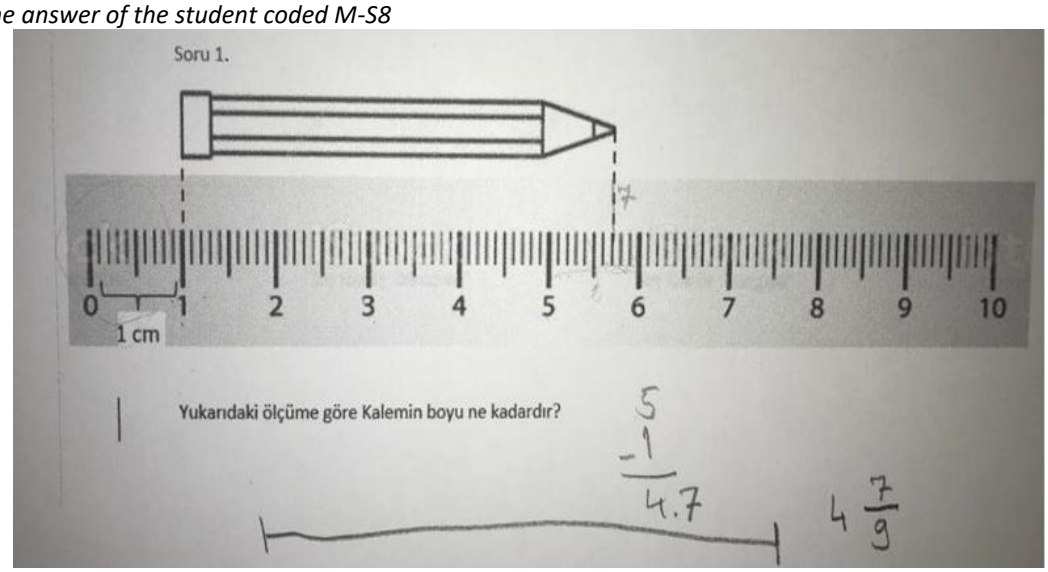
Researcher: Are you dividing among all of them? How many do you divide by?

L-S6: I divide by 7. (throws 7 lines).

While the student coded M-S8 counted notches at the Profile 1 level in the number line and ruler questions, he was at the Profile 4 level in the length model questions given with geometric shapes. It was seen that the student's length measurement and fraction knowledge level was 1 in the ruler question. The student did not recognize the unit of length and only counted the notches on the ruler. In addition, M-S8 was able to express the length on the ruler as a decimal by paying attention to the starting point, but had difficulty expressing it as a fraction when asked. In this case, the student was at level 1 by expressing the part-whole relationship in a fraction with limited understanding. The answer of the student coded M-S8 (See Figure 5) and the dialogue he had with the researcher are as follows:

Figure 5

The answer of the student coded M-S8



M-S8: This place says 1 cm. There are 10 lines here (showing between 5 and 6).

Researcher: Where did you count the lines?

M-S8: There are 10 lines here, this is the 5th line, what it shows is the 7th line. But this will not be 5.7 because it started 1 cm ahead from here. When we subtract 1 from 5, 4 remains. It becomes 4.7 cm.

Researcher: What would we write if we wrote it as a fraction?

M-S8: Well, I don't know fractions very well. Let me draw something like this. How was it pronounced?

M-S8: This place is 4, right here is 7, and here is 9.

Researcher: Why did you call it 9?

M-S8: Because there are 9 lines in the gap here.

Researcher: When there are 9 lines in between, you say 9 is 7, right?

M-S8: Yes, let's move on to the second question.

In the given ruler question, the student paid attention to the starting point of the pencil and the ruler, and although the starting point of the pencil started at 1, he counted by accepting the beginning as zero. In this case, he stated that the length of the pencil was 4.7. However, when asked as a fraction, the student stated that he did not know fractions and counted the lines between 5 and 6, and since there were 9 lines, he expressed the fraction as 7 out of 9. From this it can be said that the student knows the unit of length but cannot express the fraction.

1.2.Dot counting

In this subcategory, it was observed that students counted the points in the inner region or on the edges of the shape without recognizing the unit of length. Students who determine length through this counting process have a understanding of length measurement at level 0 and their understanding of fractions at level 0 or 1. Students coded L-S3, M-S5, and L-S6 determined their answers to the questions according to the subcategory of counting points and were classified at Profile 1 level.While students generally tended to count notches in number line and ruler questions, they counted points in length

questions given on a geometric figure. In a question asking the ratio of lengths, the student coded L-S3 counted all the points given in the figure for the length of the shape, and for the side length, he counted the points on the piece in question and compared the two numbers to each other. The following dialogue took place between the student coded L-S3 and the researcher:

L-S3: It constitutes 4 out of 16.

Researcher: How did you determine this?

L-S3: I counted the dots. (He counted all the points given in Figure 6.)

Researcher: Well, can it be 3/12? he asks.

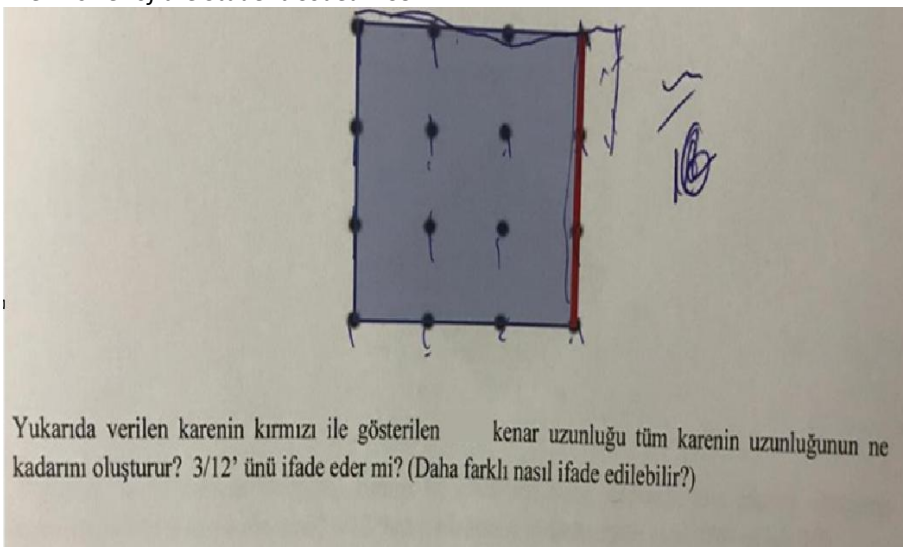
L-S3: No way, 4/16 would be okay. There are 16 points in the square, this side is 4 points.

Researcher: Well, how else can we express this? Our shape is square.

L-S3: We cannot express it differently.

Figure 6

The Answer of the Student Coded L-S3



The student obtained the number 16 by counting all the points on and inside the square, and 4 by counting the points on the edge shown with the red line. For this question, he found the ratio of the length of the shape to the length of its side as 4/16. When questioned whether the ratio was 3/12 or not, the student stated that it could not be 3/12 and said that it would be 4/16. This showed that the student could not determine the length correctly. This showed that the student's length measurement knowledge level was 0. In addition, instead of using the length model of the fraction, the student benefited from the set model, that is, he was interested in the number of points. For this reason, the student's level of fraction knowledge has been determined as level 1. The student could not express the fraction with the length model, but was able to determine the part and whole for the set model. In this case, it can be said that the student's use of the fraction length model is with limited knowledge.

Students coded M-S5 and L-S6 counted only the points on the edges, unlike the student coded L-S3. The length measurement and fraction understanding levels of students coded M-S5 and L-S6 were determined as 0. For example, in a different question, the student coded L-S6 calculated the whole as 12 by counting the points on and inside the equilateral triangle, and calculated the part as 5 by counting the points on a given side. In this case, he stated that the fraction was 5 in 12. However, when writing the fraction, he wrote it as 12/5. Thereupon, the researcher asked, "Do 12/5 and 5/12 represent the same fraction?" ' he asked and the student said that they were the same thing. Therefore, the student coded L-S6 showed with his answer that he could not measure length correctly and that his

understanding of fractions was incomplete. Although he seemed to know the concepts of part and whole in a fraction with his answer, he did not know how to write a fraction and had difficulty expressing the fraction with the length model, so the student's understanding of fraction and length measurement remained at zero level.

2. Findings Regarding Profile 2 (Interiorization)

It was observed that students in this category recognized the unit of length by stating that the interval between two points is a unit of length, and combined partial units based on guesswork when determining the length of the object. In addition, this is a category in which students are aware of the equal division of a fraction, but they do not know the relationship of the length of the whole with other parts and the relationship of each part with other parts. In this category, the level of students' understanding of length measurement and fractions is expressed as 2. This shows that students have limited understanding of fractions and length measurement. Profile 2 Only the student coded L-S9 was included in this category. At Level 2, there is awareness of equal division without mentioning the part-whole relationship. That is, the number of intervals is compared without considering the length of the whole and the relationship between each part of the length.

The student coded L-S9 was able to express both length measurement and fraction with limited understanding in the questions at the Profile 2 level. While this student could not determine the fraction as he did not pay attention to the starting point, especially in the ruler question, he was able to show the correct location of the fraction in the empty number line questions. In the questions given on geometric shapes, he said that one side is expressed as 1 in 4, with the logic that all sides are equal in square ones, but when he wanted to expand the fraction, he also counted the line segments passing through the shape. For example, the following dialogue occurred with the student regarding a square question.

L-S9: It constitutes 1/4. (He writes 1/4 correctly but expresses it incorrectly verbally-see Figure 7)

Researcher: Why did that happen?

L-S9: I counted the edges. He drew one part of four parts.

Researcher: He also asks, "Can it be 3/12?"

L-S9: 12/3 is not possible (again, he expresses it incorrectly verbally) because even if we count it in rows like this.

Researcher: Where are you counting row by row?

L-S9: So, if we count them all together with the lines passing through the inside, it actually works. This makes 12, which makes 3 pieces.

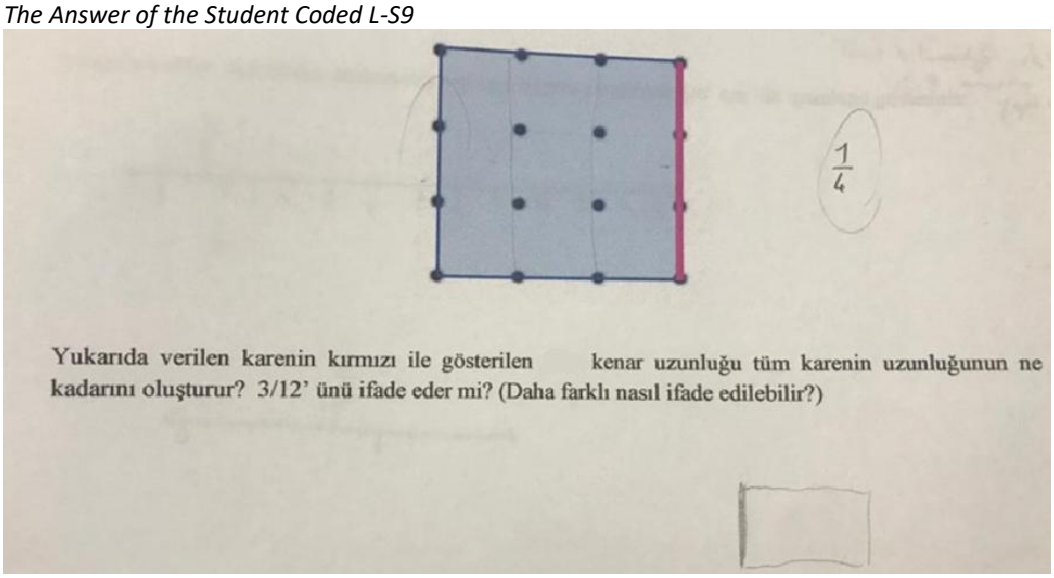
Researcher: Well, when you first said 1/4, did you count from the middle like this?

L-S9: No, I only looked at the edges because there were four equal sides.

L-S9: So it was 3 out of 12.

Figure 7

The Answer of the Student Coded L-S9



The student said that since the given figure was a square and the length of one side was asked, it was 1/4. I counted the sides and was asked about a part of four parts. Since the sides were equal, he expressed the part-to-whole relationship by saying that it represents one-fourth, but when asked about the fraction of 3/12, he took into account the length of the line segments passing through the interior. In fact, the student determined the units and determined the length correctly, but could not think of adding the lengths of the four sides of the square as the perimeter, that is, he did not make a calculation using the formula. In this question, where estimated measurements are made using units and units, it can be said that the student's understanding of length measurement remains at level 2. In addition, while there was awareness of equal division and the part-whole relationship in the understanding of fractions, there was a situation of verbally expressing fractions incorrectly. When expressing the fraction, the student wrote "3/12" and expressed it as "12 divided by 3". This conceptual confusion about the concept of fraction caused the student's understanding of fractions to remain at level 2.

A comparable scenario surfaced in the comprehension of fractions when addressing a different question. In the question asking to determine the length of a pencil, the student expressed the length of the pencil as 5 and a half centimeters and 2 units, considering the beginning as one, without paying attention to the starting point of the pencil. He thought of the unit to express half a centimeter and the remaining units, but he could not remember that the unit was millimeters and he incorrectly determined the length of his neck. When asked to express it as a fraction, he incorrectly expressed the fraction 4 in 10 as 7 in 10.

3. Findings on Profile 3 (Concentration)

Students falling into this category demonstrated the ability to recognize the unit of length, count intervals within each length piece, combine partial units through estimation, and, in the case of fractions, ascertain the amount of the whole, understand equal division, and comprehend the relationship between the parts and the whole. Their level of knowledge in length measurement was assessed as 2, while their fraction knowledge level was determined as 3. It can be concluded that students in this category possess is good in understanding of fractions, yet exhibit a somewhat limited comprehension of length measurement. This category includes students coded as M-S2, L-S3, and L-S6. Notably, students coded as M-S2 and L-S6 exhibited a tendency to overlook starting points, particularly in questions related to rulers.

For example, there was a dialogue as follows between the student coded M-S2 in this category and the researcher:

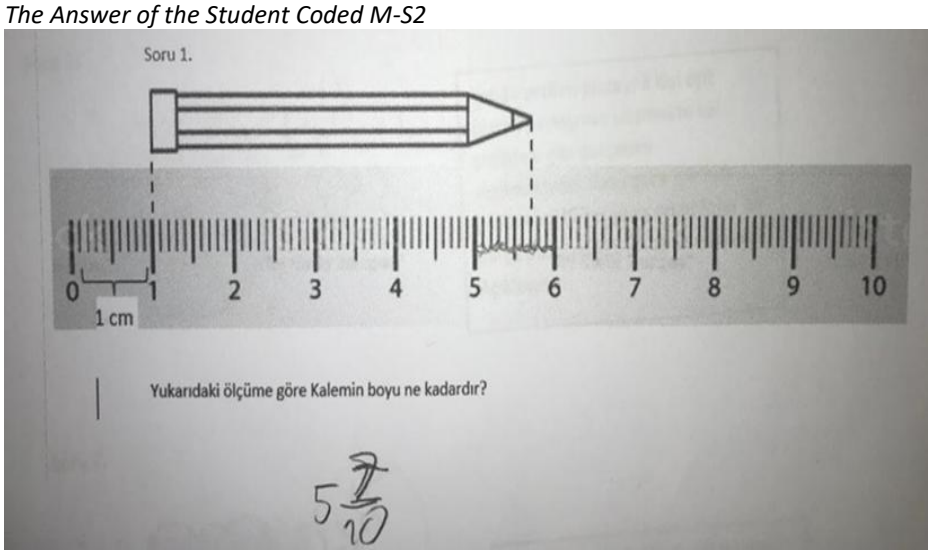
M-S2: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7… This is also 10, so it makes 5 whole and 7/10 (Look at Figure 8).

Researcher: Did you count the intervals there?

M-S2: Yes, there are 7.

Figure 8

The Answer of the Student Coded M-S2



As seen from the dialogue, the student coded M-S2 did not pay attention to the starting point and was classified at Profile 3 level. It was observed that the student's geometric measurement level was 2, indicating that they recognized the unit of length without considering the starting point. The student's fraction knowledge level was determined to be 3, meaning they could express the quantity of the whole, equal partitioning, and the relationship between the part and the whole. While the student coded M-S2 was at Profile 4 level in all other questions, they were classified at Profile 3 level in the ruler question due to not paying attention to the starting point.

4. Findings for Profile 4 (Reification)

It is known that students in this category recognize the unit of length, associate the applied geometric features with the numerical structure, and in the case of a fraction, determine the amount of the whole, equal division, and the relationship between the parts and the whole. The level of length measurement and fraction understanding of students in this category is expressed as 3, which shows that they have a good understanding of fractions and length measurement.

It was determined that students G-S1, M-S2, G-S4, G-S7, M-S8 and L-S9 were in this profile in some questions. Students coded G-S1 and G-S4 were included in the Profile 4 category in all questions. While the student coded M-S2 was at Profile 3 level in only one question, he was at Profile 4 in all other questions. The student coded M-S8 was also at Profile 4 level in three questions. The student coded G-S7 was at Profile 4 level in almost all of the questions. As observed, students labeled with the code I (good) generally fall into category 4 across all categories, while there is variability among students labeled with the codes D (low) and O (medium). When examined on a question-by-question basis, it is seen that these students generally answered the number line questions correctly. This is thought to be because of the fact that, in schools, only the number line model is emphasized as a length model among fraction models, and students have developed ideas about this model.

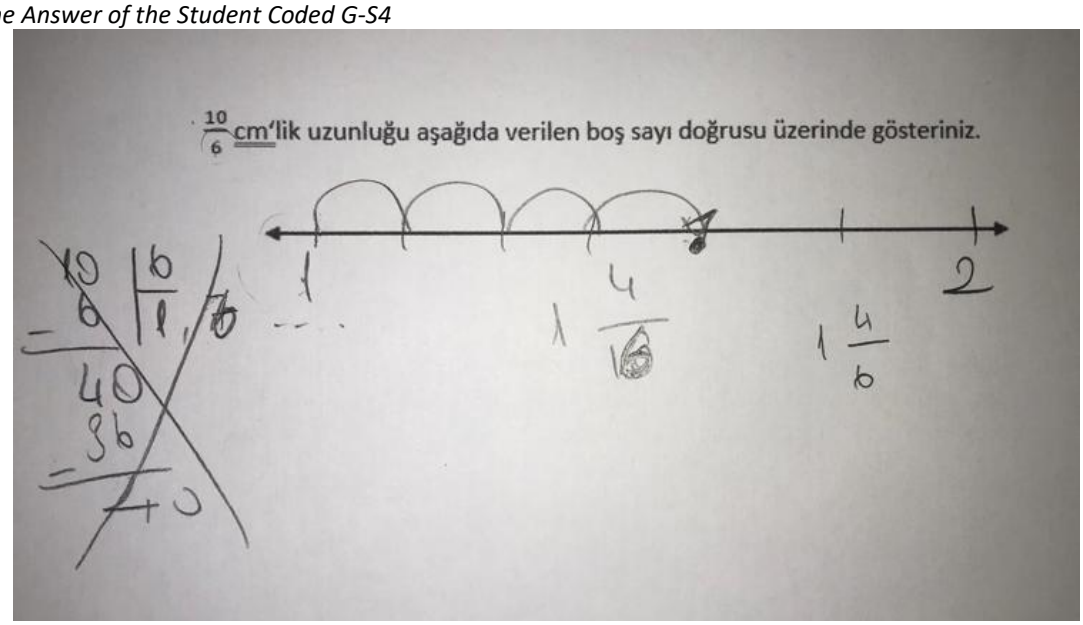
While 3 questions given for the student height model coded L-S9 were at Profile 2 level, the other 3 questions were at Profile 4 level. For example, when the student coded L-S9 was asked to show the

simple fraction 4/6 on an unnumbered empty number line, he first showed the given simple fraction between 1 and 2. After completing the compound fraction question, which was given in the form of an unnumbered blank number line, he realized his mistake and corrected it by drawing a new number line, stating that simple fractions should be between 0 and 1. First of all, the student showed the fraction between 1 and 2 on the blank number line, then in the next question, he realized that he made a mistake when showing the compound fraction on the blank number line, and returned to the question of showing the simple fraction on the number line, stating that it was not a whole and showed it between 0 and 1. The student had some conceptual confusion, but he realized his mistake.

For example, in a question asked to the student coded G-S4 in this category, the following dialogue took place between the student and the researcher.

Figure 9

The Answer of the Student Coded G-S4



G-S4: He gave a compound fraction here, for example, let's divide 10 by 6 (See Figure 9).

Researcher: You are asked to express it as a fraction, do you actually want to express it with a comma?

G-S4: Well, okay, I won't delete it, then when we convert it as a fraction, it will be a number between 1 and 2. We will divide it by 6 again. When we subtract 6 from 10, it becomes 4, so we will go with 4.

Researcher: Well, you started from 1 whole, what does 1 right there mean as a fraction?

G-S4: It would be 6/6. Since this is a compound fraction, the 6th of which is between a whole and the 4th of which are between 1 and 2.

Researcher: Is this the exact place?

G-S4: No, I put a full stop there.

In the question where the student was asked to represent a composite fraction on the empty number line, the student was able to express the composite fraction and firstly expressed the fraction as an integer fraction and correctly showed this integer fraction on the number line. The reason the student subtracted 6 from 10 during the solution is that they took 6 as a whole, thus defining the whole part of the fraction as 6/6. Subsequently, the student proceeded by iterating 4 units and was able to correctly express the fraction between 1 whole and 2 wholes. In addition to paying attention to the starting point and unit for length in the question, the student also showed that he has a solid

understanding of both length measurement and fraction by performing various operations on the fraction.

Discussion & Conclusion

The aim of the study is to reveal students' understanding of length measurement and fractions and also to reveal how their understanding of length measurement is used when determining fractions. In the research, students' answers to questions about fraction length models were examined according to four categories: pre-interiorization, interiorization, condensation and re-ification. In the Pre-interiorization (Profile 1) stage, students coded L-S3, M-S5, L-S6, M-S8; In the interiorization (Profile 2) phase, students coded M-S5 and L-S9; In the Condensation (Profile 3) phase, students coded M-S2, L-S3, L-S6, and in the reification phase, students coded G-S1, M-S2, G-S4, G-S7, M-S8, L-S9 were included. The findings obtained from the students according to their knowledge levels in these profiles generally showed that those who were unsuccessful in measuring length were also unsuccessful in determining the fraction, and those who were successful were also successful in determining the fraction. Overall, one could assert that the identification of fractions is intricately connected to the measurement of length. Addressing the inadequacies in length measurement would prove beneficial in gaining a deeper comprehension of fractions. Even if a student knows what a fraction is and how to write it, if they don't know how to measure length, they may inevitably fail questions that use the length measurement model of fractions. Patahuddin, Usman, and Ramful (2017) concluded that students have many difficulties interpreting fractions in terms of measurement and need guidance to transfer their interpretations of area to the interpretation of measurement.

One of the results obtained in the study is that the distribution of students into profiles is related to their success levels. In this case, it can be said that the successful student has a good understanding of length measurement and fractions, understands both subjects well, and uses the length model when determining the fraction. When the success levels of these students at Profile 1 level were examined, it was noted that they were at medium and low levels. When the success levels of these students at Profile 4 level were examined, it was noted that they were at good and medium levels. For this reason, it is thought that the Profile 1 and Profile 4 levels, where students are concentrated, reveal the basis of students' understanding of fractions and the concept of length measurement, as well as the students' success levels. Students with good and average success were able to express the concept of fractions and relate length measurement. Students with low achievement levels had difficulty expressing the concept of fractions and associating them with length measurement. Similarly, Özçakır Sümen (2022) stated in their research that students with high and medium levels of achievement have rich mental maps related to the concept of fractions. As an exception to this result, it was noted that the success level of the student coded L-S9, who was at the Profile 4 level, was low. While the student coded L-S9 was in Profile 2 in four out of 6 questions, he was in Profile 4 in 2 questions. This student had situations such as not paying attention to the starting point, especially in ruler questions, and not being able to determine the integer intervals in which fractions were given in empty number line questions. The questions where the student is at Profile 4 level involve geometric shapes such as squares and triangles. The reason the student coded L-S9 is at Profile 4 level in these questions may be because of the fact that they have a better understanding of the perimeter lengths of well-known and frequently used geometric shapes.

The results obtained from the findings regarding the length model showed that the grade levels of the students were not related to the determined levels of length measurement and fraction understanding, that is, variables such as grade level and age were not decisive for the profiles. For example, it was observed that 6th grade students could give answers at the Profile 4 level, while 8th grade students could give answers suitable for the Profile 1 category. Length measurement is a topic covered at the elementary and 5th-grade levels, with no further learning objectives related to this subject in the subsequent grade levels. Therefore, younger students might be more successful in explaining length measurement and fractions using the length model due to their more recent learning and greater inclination towards modeling. However, contrary to the results obtained in the study,

Gürbüz and Birgin (2008) stated that as the education level of students increases, their ability to operate with geometric models and number line representations increases. Therefore, regardless of grade level, it is important to include different representations of the learned concept to foster conceptual understanding in students.

In the study, it was observed that students showed different performances on numbered and unnumbered number lines, and they made more successful measurements by recognizing the length unit on the numbered number line. Students generally did not pay attention to the starting point in the ready-made equally divided ruler questions and tended to read the last number at the end point on the ruler (students coded L-S3, M-S2, M-S5, L-S6, L-S9). In the unnumbered blank number line questions, they could not make equal divisions and counted notches instead of intervals. For example; The student coded L-S3 did not pay attention to the starting point in the given ruler question and was able to express the length in decimal terms, albeit to a limited extent, and although he used units such as m, cm, mm correctly, he did not recognize the unit of length, tending to count notches when given an unnumbered blank number line. It was noteworthy that the student coded L-S3 was at the preliminary interiorization stage in the blank number line questions. Similar to our findings, Solomon et al. (2015) also claimed that students tend to read the number that is the end point of the object given on the ruler, and when the numbers on the ruler are deleted, they count notches. Similar findings were found in Güven Akdeniz and Argün's (2019) study, and it was observed that students first tried to read the last number they saw on the ruler and then counted the notches. Stephen and Clements (2003) stated that students developed such strategies since they could not conceptualize the table and its units. Kamii (1995) states that this situation is due to the fact that the length takes up space and is not noticed by the students. According to Lehrer (2003), as long as students see the concept of measurement as reading a ruler, they will not understand length measurement. Therefore, it is clear that students who tend to count notches and do not pay attention to the starting point on the ruler will not be able to understand the measurement made with a ruler, the repetition of units, and the relationship between the number of fractions and measurement. Studies in the literature have indicated that students' deficiencies in measurement concepts such as units and unitizing pose an obstacle to developing the measurement meaning of fractions in students (Bakırcı Saymaz and Argün, 2022; Hacker et al., 2019). The ruler and empty number line examples with a changed starting point given in our study were suitable exercises to express whether the students could make sense of this concept or not. Additionally, Van de Walle et al. (2013) claimed that numbers should be written in the middle of each unit on a number line or ruler in order to enable students to count the interval in measuring length. In other words, it can be said that the number written at the end of the unit increases the student's tendency to count notches.

It was concluded in the study that while students tended to count notches in number line and ruler questions, they tended to count dots or internal lines in length model questions given on a geometric figure. For example, the student coded L-S9 was able to memorize the questions given in the form of a square and say that the length of a side is one quarter as the shape is a square. This situation supports the understanding that students make evaluations by rote, based on mathematical operations or by looking at the appearance of tasks that they have difficulty measuring (Bozkurt et al., 2018). Additionally, students counted the lines passing through the square to find the expanded version of the fraction. Marshall (1997) attributed this situation to students' inability to distinguish between area and perimeter conceptually. In this sense, it will be useful to understand that the length of the object is the boundary line of the object. For this purpose, it may be recommended to do exercises to calculate the lengths of objects by drawing the traces they leave on paper. At the same time, the students' knowledge of the part-whole relationship was examined in the length model questions given on the geometric figure, and the observation revealed that students encountered challenges when attempting to ascertain the entirety and identifying the unit. Indeed, due to the student's unfamiliarity with measuring the length of an object, they struggled to articulate the part-whole relationship between the object's length and the length of one side. Put differently, students who lacked the knowledge to accurately calculate the length of the object found it challenging to conceptualize the object's length as the entirety of the fraction. In fact, although they knew that the fraction was expressed as part/whole, they could

not apply this correctly to the length, and in particular, they determined the whole incorrectly. That is, the conceptual meaning of fractions should begin with the idea of measurement, which should be based on the mental activity of unit iteration (Bakırcı Saymaz and Argün, 2022). This approach will provide a solid foundation for constructing fractions by reorganizing the way students work with whole numbers (Simon et al., 2018; Wilkins and Norton, 2018).

Some of the students drew notches in the unnumbered number line questions and wrote the value between the notches rather than on the notches, since it was a fraction. This shows that students cannot conceptualize the number line. These findings also coincide with the findings of Pesen's (2008) study on students' misconceptions and learning difficulties on the number line. Patahuddin et al. (2017) concluded that the students faced numerous challenges when it came to interpreting fractions within the context of measurement on the number line and that they should be guided to transfer their field interpretations of fractions to measurement interpretation. Similarly, in this study, it was stated that students had difficulty in dividing the whole into parts when representing fractions on the number line. Because in the area models of fractions, the whole is evident, but in the measurement model given on the number line, there is more than one whole on a number line, between integers, and a careful teaching approach is required for students to fully learn the concept of fractions on the number line (Bright et al., 1988; Zhang et al., 2015). Similarly, as a result of Okur and Çakmak Gürel's (2016) study, it was stated that students mostly had misconceptions about determining the part-whole relationship.

Generally speaking, this study reveals students' fraction knowledge, there are almost the same students in Profile 1 and Profile 4. It can be said that these two issues are related to each other, as those who do not have a good understanding of length measurement also have a poor understanding of fractions. Especially students who did not know how to measure length could not determine the part and whole in a fraction. Similarly, in their study, Topçu and Gürefe (2020) stated that students made errors in questions related to the length model due to deficiencies in their knowledge of fractions. For example, they found that students were indecisive about forming a second whole or adding a single piece in the mixed fraction arrangement model, and that this indecision stemmed from gaps in their understanding of mixed fractions.

Suggestions

In light of the conclusions drawn from the study's findings, various suggestions were made to education faculties, mathematics teachers and researchers: Can (2019) stated that teachers are insufficient in terms of conceptual knowledge of fractions, have difficulty in creating realistic daily life problems, and are inadequate in expressing students' misconceptions. Duran (2017), on the other hand, observed that prospective teachers tend to use the area model in the representation of fractions and operations with fractions, they prefer the minimum length model, and that prospective teachers make preparations for the lesson and remind them of prior knowledge, but they do not encourage students to create different representations in the lesson. Therefore, it was concluded that the field knowledge of the prospective teachers was also reflected in their classroom teaching. Therefore, it is essential to offer in-service training to enhance teachers' understanding of models and to augment the knowledge of teacher candidates regarding models during their undergraduate education.

Our findings address not only the validity of students' approaches to problems, but also whether students are successful in explaining and integrating basic mathematical concepts. As Battista (2017) and Mitchell (2011) stated in their studies, mathematics teachers who teach the concept of fractions need to design tasks that integrate multiple fields in mathematics and establish connections between different fields of mathematics., Gökkurt et al. (2015) found that most teachers started teaching fractions with the right activities, but they had incomplete information about the models they used and during use.

Considering students' misconceptions about length measurement, it is important for them to understand that repeated units are used on a ruler and that counting notches does not convey any meaningful measurement (Güven, Akdeniz, & Argün, 2018).

While the students had difficulty with the number line, they counted the length between the points, not the points given on the figures. Students who did not recognize the length unit in the number line questions and counted notches were able to determine the length unit in the questions given on dotted paper and correctly determine the perimeter of the shape. Therefore, when teaching the number line model, part-whole relationship should be emphasized, different representations such as empty number line and broken ruler should be shown to students, and symbols should be used without ignoring the formal meaning of fractions on the number line.

Hershkowitz and Vinner (1980) state that students generally do not need definitions to think, but rather mental pictures and images of concepts that they can associate. In other words, teachers need to provide this environment to students during the learning process.

It is thought that when such research is conducted with prospective teachers, it will raise awareness about the prospective teachers' ability to expand their content knowledge (Ball, Thamees, & Phelps, 2008). Çetin (2020) concluded that primary school mathematics teacher candidates' subject knowledge regarding fractions is not based on conceptual knowledge but rather has the nature of procedural knowledge, and increasing the conceptual learning and awareness of teacher candidates is very important in this sense.

Author Contribution Rates

The authors of the study contributed equally at all stages from the planning of the research to the writing of the final report.

Ethical Declaration

All rules in the "Higher Education Institutions Scientific Research and Publication Ethics Directive" have been complied with and none of the "Actions Contrary to Scientific Research and Publication Ethics" in the second part of the directive have been carried out. This research was found ethically appropriate by the decision of Usak University Scientific Research and Publication Ethics Board dated 09.09.2021 and numbered 2021-168.

Conflict Statement

The author declares that there is no conflict of interest with any institution or person within the scope of the study.

Türkçe Sürümü

Giriş

Kesir kavramı öğrencilerin ilköğretim yıllarında karşılaştığı en karmaşık matematik kavramlarından biridir (Newstead ve Murray, 1998). Öğrenciler günlük hayatta kesirlerle karşılaşmalarına rağmen (Charalambous ve Pantazi, 2005) doğal sayılar öğrenildikten sonra, kesir kavramı, genellikle öğrenciler için anlaşılması zor olan ilk soyut kavramlardan biri olarak karşımıza çıkar (Behr vd., 1993). Bunun yanında kesirleri kavramak birçok ileri düzey matematik konusunun temelini oluşturduğu için önemlidir (Özdemir ve Özçakır, 2019). Van de Walle vd. (2013) bu durumu "Kesirleri anlamak, öğrenciler için temel bir konu olup, belirli bir bölgenin 7/4'ünü hesaplamaktan daha fazlasını içermelidir" şeklinde ifade etmiştir. Kesri kavratabilmek için kesir kavramını temsiller ve modeller yardımıyla anlamlandırmak gerekmektedir (Duval, 1993). Kesirlerin öğretiminde etkili olarak kullanılan ve daha kolay anlaşılmasını sağlayan temsiller ve modellerin olduğunu öne süren birçok çalışma bulunmaktadır (Cramer ve Henry, 2002; Siebert ve Gaskin, 2006; Van de Walle vd., 2013). Öyle ki kesirlerin öğretilmesi için alan, uzunluk niteliğine sahip modeller ve küme modellerinin kullanımı önerilmektedir. Uzunluk niteliğine sahip modeller kesirlerin çubuk, doğru parçası, sayı doğrusu veya cetvel gibi uzunluklarla temsil edildiği model olup yurtdışı okul müfredatında ağırlıklı olarak kullanılan modellerden olmakla (Van de Walle vd., 2013) birlikte ülkemizdeki okul müfredatında da uzunluk modeli için daha çok sayı doğrusu kullanılmaktadır (MEB, 2018). Uzunluk niteliğine sahip modeller kesirlerin parça-bütün kavramının ve parçanın bütüne göre göreceli boyutunun anlamını açıkça gösterilebilmektedir ve bu modelde başlangıçta çubuklar, ip parçaları ve kartondan kesilmiş şekiller gibi görsel araçlar kullanılarak öğrencilere kesirler öğretilebilir (Baykul, 2006). Bu tür görsel araçlar kullanıldıktan sonra kesirlerin sayı doğrusu üzerinde gösterimlerini, kesirlerin sıfıra olan uzaklığını ve diğer sayılarla olan göreceli büyüklüklerini öğretmek daha etkili olacaktır (Olkun ve Toluk Uçar, 2007).

Kesir için bütün, eş parçalama, parça-bütün ilişkisi; geometrik ölçme için birimler, öznitelik, toplamsallık (Lehrer, 2003) gibi temel kavramların her biri kendi içinde birden çok yapıya sahiptir. Uzunluk ölçme kavramı, ilkokulda öğrencilerin ölçmeyle ilgili karşılaştıkları ilk kavramdır (MEB, 2015). Uzunluk ölçme kavramı, öğrencilerin ölçme ile ilgili karşılaştıkları ilk kavram olması sebebiyle ve ölçmenin temel fikirlerinin oluştuğu, alan ve hacim gibi daha üst kavramlara temel oluşturabilmek açısından oldukça önemlidir (Outhred ve McPhail, 2000; Stephan ve Clements, 2003). Ayrıca ölçme öğrenme alanının kesir kavramı, ondalık gösterim, oran, rasyonel sayı gibi matematiksel kavramların gelişimi için de zemin hazırladığı düşünülmektedir (NCTM, 2006). Bazı araştırmacılar öğrencilerin uzunluk ölçme kavramı ile ilgili 8. sınıfa kadar süren yanılgılara sahip olduklarını (Kayhan ve Argün, 2014), özellikle ilkokulda öğrencilerin uzunluk ölçümü yaparken çizgileri, sayıları, noktaları saydıklarını ifade etmişlerdir (Barrett vd., 2003). Bilimsel olarak bir geçerliliği bulunmayan, öğrencilerin kendilerince geliştirdikleri bu yöntemler birçok çalışma ile de ifade edilmiştir (Stephan ve Clements, 2003; Van de Walle vd., 2013; Zembat, 2009). Örneğin, ölçümde birimi yinelerken boşluk bırakma, birimi yinelerken her bir yineleme arasına parmak koyma, ölçümde birimi yinelerken yinelemenin başlangıç ve bitiş noktasına dikkat etmeme, farklı hizalarda konumlanan nesneleri uzunlukları bakımından doğrudan karşılaştırma noktasında problemler yaşama, doğrusal olmayan iki nesnenin uzunlukları bakımından karşılaştırılma noktasında problemler yaşama, uzunluk ölçülen birim ne olursa olsun ölçüm sonucunda birimi ifade etmesi istendiğinde cm veya m ile ifade etme… gibi literatürde yer alan ölçme ile ilgili diğer kavrayış/kavram yanılgılarından bazılarıdır. Bu durum öğrencilerin uzunluk ölçmeyi kavramsal olarak öğrenemediğini ve dolayısıyla diğer öğrenme alanlarında da sıkıntı yaşayabileceğini göstermektedir. Bu sebeple uzunluk kavramının öğretilmesi önemlidir. Öyle ki alan yazın incelendiğinde birçok araştırmacı (Hackenberg ve Lee, 2015; Van de Walle vd., 2013) kesrin ölçme yorumunun kesrin nicelikleri temsil

ettiğinin anlamlandırılmasına katkı sağladığını ifade etmektedir. Kesirde ölçme anlamı, bir uzunluğu belirlenen başka bir uzunluğa göre ölçme durumlarında ortaya çıkar ve bir uzunluğu belirleyip daha sonra o uzunluk için ölçme aracı kullanmayı gerektirir (Van de Walle, 2013). Yani kesir kavramının da ölçme eyleminden doğduğu söylenebilir. Ölçme aracı birim olarak kabul edilirken, ölçüm sonucu birim cinsinden, doğal sayılar kullanılarak ifade edilmektedir (Saymaz ve Argün, 2022). Fakat doğal sayılar ayrık nicelikleri (büyüklükleri) saymada yeterli olmasıyla birlikte uzunluk, zaman, hacim gibi sürekli nicelikleri (büyüklükleri) daha doğru, daha hassas ölçüm düşüncesi ve birim ölçüyü daha küçük parçalara ayırma fikri (birimi yeniden ölçeklendirme), kesir kavramının doğmasına sebep olmaktadır (Barnett-Clarke vd., 2010; Simon vd., 2018; Wijaya, 2017). Örneğin $\frac{4}{5}$ kesrinde, $\frac{1}{5}$ kesri ölçme aracı olarak belirlenerek $\frac{4}{5}$ kesrini elde etmek için $\frac{1}{5}$ kesrinden dört tane gerektiğinin ifade edilmesi için sayılabilir ve ölçülebilir (Van de Walle, 2013). Ölçme anlamının kaynağı kesrin bir sayı doğrusu üzerinde uzunluk olarak gösterimidir (Chapin ve Johnson, 2006). Çok sayıda araştırma (Hackenberg ve Lee, 2015; Lee, 2017; Lee ve Hackenberg, 2014; Steffe ve Olive, 2010; Van de Walle vd., 2013), kesirlerin sayı doğrusundaki gösteriminde yaşanan zorlukları ele almış ve bu bağlamda öğrencilerin kesirleri daha iyi anlamaları için parça-bütün yorumu yerine ölçüm temelli bir yaklaşım benimsemeleri gerektiğini öne sürmüştür. Ayrıca, ölçme yorumu, öğrencilere kesirleri nicelik olarak değerlendirmeleri noktasında yardımcı olur (Hackenberg ve Lee, 2015; Van de Walle vd., 2013). Mitchell (2011) kesrin uzunluk modelleriyle yaptığı araştırmada öğrencilerin uzunluk modeli problemlerini çözerken kesir ve uzunluk ölçme anlayışlarının bir arada kullandığını ifade etmiştir. Literatür incelendiğinde kesirlerde geometrik modelleri kullanabilme becerileri (Topçu ve Gürefe, 2020); sınıf öğretmenlerinin kesirlerin farklı anlam ve modelleri konusundaki görüşleri (Toptaş, Han ve Akın, 2017); öğrencilerin kesirleri modelleme becerileri (Çelik ve Çiltaş, 2015); öğrencilerin kesir modellerine uygun problem kurma ve çözme becerileri (Kavuncu ve Yenilmez, 2021); sayı doğrusu konusunda kavram yanılgıları ve öğrenme güçlükleri (Pesen, 2008); kaynaştırma öğrencilerine temel kesir kavramlarının öğretiminde model kullanımı becerilerini (Yakar, 2019) inceleyen çalışmalara rastlanılmıştır. Ayrıca yurt dışındaki çalışmalar incelendiğinde de kesrin alan modelleriyle ilgili çalışmaların olduğu (Mitchell ve Horne, 2008), alan ve uzunluk modelini Kieren'in dört üç dört modeli ile incelendiği (Mitchell, 2011), sayı doğrusu görevlerindeki kavram yanılgıları (Mitchell ve Horne, 2008; Patahuddin, Usman ve Ramful, 2017) hakkında çalışmalar olduğu görülmüştür. Ayrıca bu çalışmada kullandığımız Sfard'ın (1991) teorisinin genelde teorik çalışmalarda kullanıldığı, bu tarz uygulamaya dayalı çalışmalarda kullanılmadığı da dikkat çekmektedir ve bu anlamda da çalışmanın matematik eğitimine katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Kesirlerin uzunluk modelleriyle çalışmak yalnızca kavramların sağlam bir şekilde anlaşılmasını değil, aynı zamanda tam bir anlam oluşturmak için ilgili kavramları da birbirine bağlama yeteneğini de gerektirir (Hodges vd., 2008; Lee ve Lee, 2020). Öğrencilerin uzunluk modeli ile verilmiş kesir problemlerini çözerken kesir bilgisi ile geometrik ölçme bilgisini bir arada kullandığı düşünüldüğünden bu çalışmada , kesirlerin uzunluk modeli ile ilgili bilgilerini ve muhakemelerini incelemek için farklı şekilde verilmiş uzunluk modellerini içeren problemleri çözmeleri ve bu süreçte kullandıkları stratejileri ve akıl yürütmeleri ifade etmeleri istenmiştir. Araştırmada kesirlerin uzunluk modelleri sayı doğrusu, numaralandırılmamış boş sayı doğrusu, kırık cetvel, geometrik şekiller üzerinde uzunluk modelleri şeklinde farklı şekillerde sorularak öğrencilerin uzunluk ölçme ve kesir anlayışlarının ortaya çıkarılması ayrıca kesri belirlerken uzunluk ölçme anlayışlarının nasıl kullanıldığının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır.

Kavramsal Çerçeve

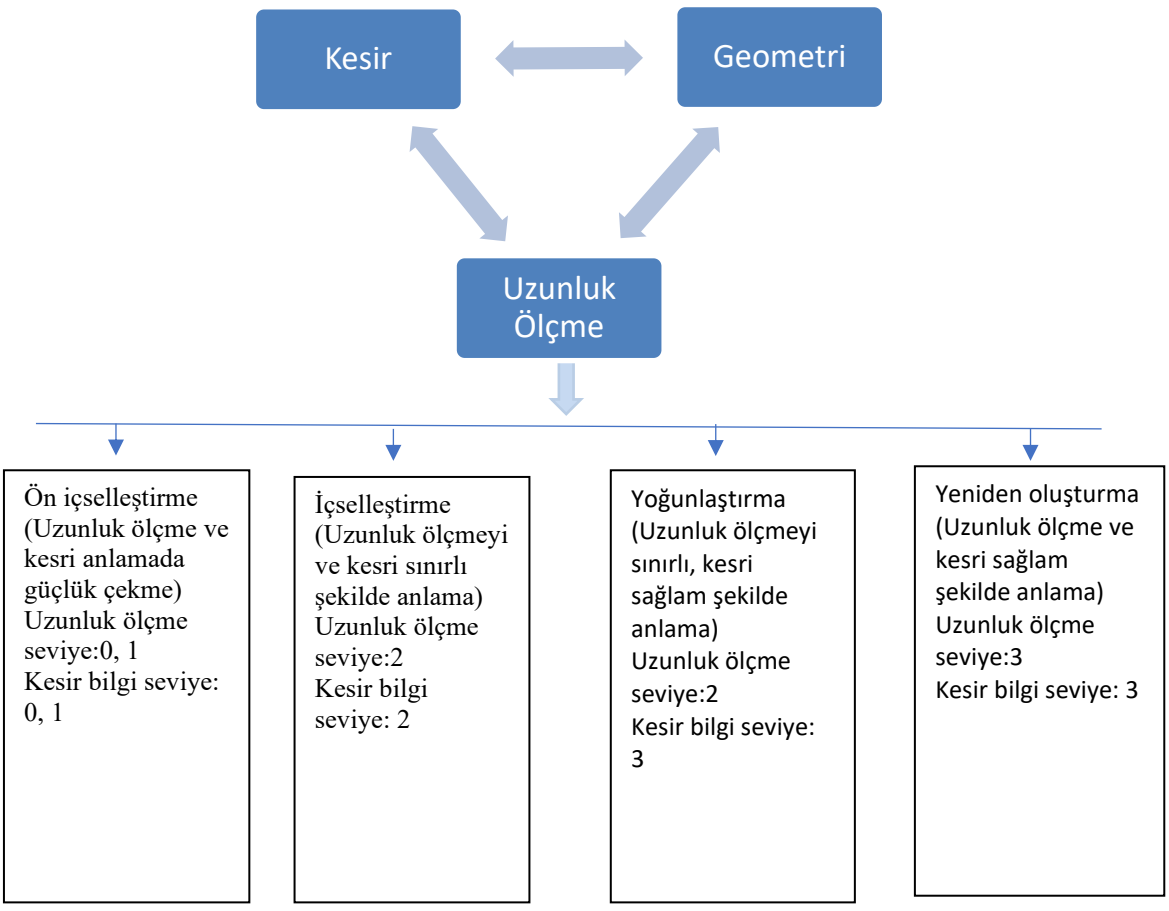
Sfard (1991), matematiksel kavram ediniminde işlemselden kavramsala doğru bir teorik çerçeve sunmuştur. İşlemsel anlayışın yapısaldan önce geldiğini, öğrencilerin önce fiziksel modellerle çalıştığını daha sonra resimsel temsillere geçtiğini son olarak da sadece sembollerle çalıştığını ifade etmektedir. Sfard'a (1991) göre işlemsel anlayıştan konunun yapısal olarak anlaşılmasına kadarki süreç içselleştirme, yoğunlaştırma ve yeniden oluşturma olmak üzere üç aşamada gerçekleşmektedir. *İçselleştirme* aşamasında, öğrenciler tanıdık nesnelerle etkileşimde bulunur ve sonunda yeni bir kavramı anlamak için gereken süreçlerle karşılaşırlar. *Yoğunlaştırma* aşamasında, öğrenciler belirli bir süreci bütünsel olarak düşünebilir hale gelirler ve kavramın farklı temsilleri arasında geçiş yapabilirler. *Yeniden Oluşturma*

aşamasında ise öğrenciler kavramı tam anlamıyla içselleştirirler, belirli bir koşulu karşılayan tüm örnekleri içeren problemleri çözebilirler. Bu aşama ile birlikte, daha üst düzey kavramlar içselleştirilmeye başlar.

Sfard'ın kavram oluşturma sürecinin sürekliliği öğrencilerin geometrik ölçme ve kesir anlayışlarını birbirine bağlama becerisini gözlemlemek için bir bağlam sunmaktadır (Lee & Lee, 2020). Lee ve Lee (2020) de öğrencilerin kesirlerin alan modellerinin verildiği problemlerde yer alan geometrik ölçmeyi anlamalarını belirlemek için Sfard'ın (1991) teorisini dikkate alarak bu modele ön içselleştirme aşamasını da eklemiş ve Profil 1 (Ön içselleştirme), Profil 2 (İçselleştirme), Profil 3 (Yoğunlaştırma) ve Profil 4 (Yeniden Oluşturma) olmak üzere bu süreci dört aşamalı olarak ifade etmiştir. Model, öğrencilerin her bir şeklin alanını bulurken, örneğin kesrin alan modelini sadece bir geometrik şekil üzerinde göstermekle kalmayıp; kesrin temel kavramları olan eş parçalama, parça- bütün ilişkisi gibi özelliklerini kullanmayı da içermektedir. Yani bu profillerde öğrencilerin geometrik ölçmede alan bilgisini ve kesir bilgisini içeren tespitler yer almıştır (Lee ve Lee, 2020). Şimdiki araştırmada ise Lee ve Lee'nin (2020) çalışmasından farklı olarak alan ölçmeye dair profiller uzunluk ölçme için uyarlanmıştır. Bu profiller Şekil 1'de yer almıştır.

Şekil 1

Öğrencilerin Uzunluk Ölçme ve Kesir Anlayışlarını Gösteren Profiller



Uzunluk ölçme ve kesir anlayışlarına ilişkin bilgi seviyeleri Tablo 1'de yer almıştır.

Tablo 1

Uzunluk Ölçme ve Kesir Anlayışlarına İlişkin Bilgi Seviyeleri

Seviyeler	Uzunluk/kesir	Seviyelere ilişkin açıklamalar	Seviyelere ilişkin örnekler
Seviye 0	Uzunluk	*uzunluk ölçme birimini tanımama	Örneğin, verilen bir cetvelde yalnızca çentikleri sayarak uzunluğu tespit etmiş ve biriminin de ne olduğunu belirleyememiş bir öğrenci uzunluğun ölçü birimini tanımlamaktadır.
	Kesir	*bütün ve eş parçalamanın farkında olmama,	Örneğin, bir nesne parçalara ayrıldığında bütünün ne olduğu ve oluşan parçaların eş olduğu bilinmemektedir.
Seviye 1	Uzunluk	*uzunluk biriminin ne olduğunu belirtmeden uzunluk miktarını tespit edebilme	Örneğin, öğrenci uzunluk biriminin m, cm, mm, … gibi birimler olduğunu bilmemektedir.
	Kesir	*sınırlı anlayışla eş parçalamanın farkında olma	Örneğin, aralıkların eş olduğu, doğru parçası üzerindeki çentiklerin sayısının eşit olduğu, iki parçadan birinin diğer parçadan büyük görünmemesi gerektiği bilinir
Seviye 2	Uzunluk	*uzunluk biriminin ne olduğunu bilmekte ancak uzunluğun miktarını belirlerken doğal sayı şeklinde ifade edilemeyenler için tahmine dayalı bir sayım gerçekleştirmektedir.	Örneğin, uzunluk ölçüsünü Belirlerken doğal sayı olan uzunluklarını doğru bir şekilde sayarken, doğal sayı olmayan uzunluklarda ise parçaları birleştirerek tahminen bir ölçüm yapmaktadır.
	Kesir	parça-bütün ilişkisinden bahsedilmeden eş parçalamanın farkında olma	Örneğin, bütünün uzunluğu ve bütüne ait her bir parçanın uzunluğu ile arasındaki ilişki dikkate alınmadan aralıkların sayısı karşılaştırılır.
Seviye 3	Uzunluk	uzunluk ölçerken belirli formülleri kullanmayı tercih etme	Örneğin, karenin çevre uzunluğunu belirlerken öğrenci bir kenar uzunluğunu dört ile çarpmaktadır.
	Kesir	bütünün miktarı, eş parçalama ve parçalar ile bütün arasındaki ilişki bilinir.	Örneğin, öğrenci karenin çevresinin uzunluğunu belirleyebilir, kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi ve her bir kenar uzunluğu ile çevre uzunluğu arasındaki ilişkiyi kesirsel olarak belirleyebilir.

Tüm bu bilgiler öğrencilerin uzunluk ölçme ve kesir anlayışı hakkında bize fikir sunmaktadır. Bu çalışma ile de öğrencilerin uzunluk ölçme ve kesir anlayışları incelenecek ve kesri belirlerken uzunluk ölçmeyi nasıl kullandıkları da ortaya çıkarılacaktır.

Yöntem

Araştırmanın modeli

Araştırmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Durum çalışmaları sınırlı bir sistemin çoklu bilgi kaynakları aracılığıyla detaylı ve derinlemesine incelendiği ve betimlendiği bir yaklaşımdır (Creswell, 2018). Bu çalışmada, öğrencilerin uzunluk ölçme ve kesir anlayışlarının ortaya çıkarılması için detaylı ve derinlemesine incelenmesi amaçlandığından bir durum çalışmasıdır. Bu amaçla araştırma kapsamında Lee ve Lee'nin (2020) kategorileri ve Sfard'ın (1991) teorisi referans alınarak hazırlanan sorulara ait öğrenci cevapları durum olarak değerlendirilmiştir.

Katılımcılar

Çalışma grubunu 2021-2022 eğitim öğretim yılında Samsun ilinde bulunan bir ortaokuldaki altı, yedi ve sekizinci sınıflardan 3 er tane olmak üzere toplamda 9 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmada bu devlet okulunun seçilme sebebi; okul idaresinin çalışma yapılmasını desteklemesi, öğrencilerin istekli olması, araştırmacı tarafından okula ulaşımın kolay olması ve çalışmanın rahatça yürütülebilmesidir. Katılımcılar maksimum çeşitlilik örneklemesi yöntemine göre belirlenmiş dokuz öğrenciden oluşmaktadır. Bu katılımcılar bir devlet ortaokulundaki aynı sınıflarında öğrenim gören 3 sekizinci sınıf, 3 yedinci sınıf ve 3 altıncı sınıf öğrencisidir. Öğrencilerin seçiminde amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Seçkisiz olmayan amaçlı örnekleme, araştırmanın amacına bağlı olarak istenen bilgilere sahip olduğu düşünülen bireylerin seçilmesidir (Frankel ve Wallen, 2006). Maksimum çeşitlilik ilkesine dayalı olarak, farklı sınıf seviyelerinden öğrenciler, öğretmenler ve okul idaresiyle görüşülüp öğrencilerin geçmiş yıl matematik karne notları, öğretmen kanaati baz alınarak ve öğrencilerle ön görüşme yapıp çalışmaya gönüllü olarak katılmak isteyen öğrencilerden her sınıf seviyesinde iyi, orta ve düşük seviyede öğrenciler tercih edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin bu sınıf seviyelerinde seçilme sebebi, daha önce ilkokulda ve 5. sınıfta uzunluk ölçme ve kesir kazanımlarını öğrenmiş olmaları ve araştırma konusunda belirli bir bilgi birikimine sahip olmalarıdır. Bu stratejinin kullanılma sebebi çeşitlilik gösteren durumlar arasında ortak bir durumun olup olmadığını belirlemeye çalışmak ve problemi farklı boyutlarıyla ortaya koymaktır (Creswell, 2005). Çalışmada araştırmacı kolay ulaşabileceği ve iletişime geçebileceği öğretmen ve öğrencilerin bulunduğu okulu tercih etmiştir. Öğrencilere başarı düzeyleri D-düşük, O-orta ve İ-iyi olmak üzere İ-Ö1, O-Ö2, D-Ö3 … şeklinde kod isimler verilmiştir. Katılımcılardan İ-Ö1, O-Ö2, D-Ö3 kodlu öğrenciler 8. sınıf, İ-Ö4, O-Ö5, D-Ö6 kodlu öğrenciler 7. sınıf, İ-Ö7, O-Ö8, D-Ö9 kodlu öğrenciler 6. sınıf öğrencileridir.

Veri Toplama Aracı ve Süreci

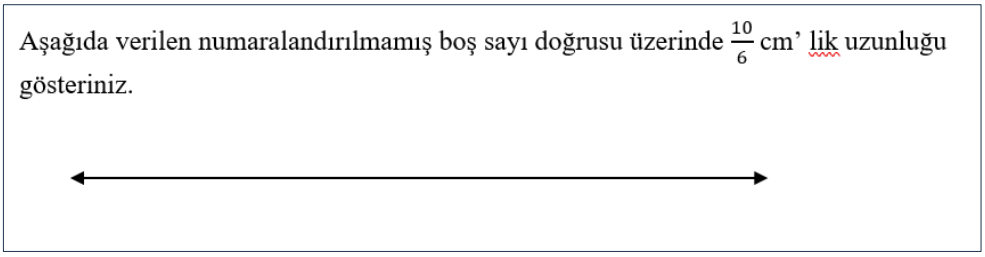
Çalışmada veriler yarı yapılandırılmış görüşmeler ve görüşme esnasında öğrenciler tarafından tutulan notları inceleme yöntemiyle elde edilmiş olup öğrencilerin kâğıt üzerinde çizdiği şekiller ve işlemler fotoğraflanarak çalışmaya eklenmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşmelerin avantaj ve dezavantajları bulunmaktadır, her ne kadar genel sonuçlara varmaya yetecek kadar geniş bir örneklemi kapsamasa (Adams, 2015) da açık uçlu ve irdeleyici sorular aracılığıyla bireysel düşüncelerin derinlemesine anlaşılmasına olanak sağlamaktadır (Adams, 2015). Bu araştırma ile de öğrencilerin algılarına ilişkin genel sonuçlar çıkarmak amaçlanmayıp, belirli deneyimlere sahip öğrencilerin çalışılan konuyu nasıl algıladıkları belirlenmek istenmiştir. Amacımız daha önceki yıllarda ilkokul ve 5. sınıfta kesir ve uzunluk ölçme kazanımları ile belirli deneyimler yaşamış olan öğrencilerin konuya ilişkin algılarını ortaya çıkarmaktır. Görüşmeler öğrencilerle birebir görüşmeler yoluyla, 30'ar dakikalık oturumlar halinde gerçekleştirilmiş ve video kamera ile kayıt altına alınmıştır.

Araştırmada öğrencilerin uzunluk ölçme anlayışları ile kesir anlayışını belirlemeye yönelik alan yazın kaynak taraması yapılmış ve uzunluk ölçme, kesrin uzunluk niteliğine sahip modeller, sayı doğrusu soruları incelenerek uzunluk modeli soruları oluşturulmuştur. Böylece kesir için eş parçalama ve parça-

bütün ilişkisi; ölçüm için ise birimler, öznitelik, toplamsallık gibi temel kavramları ortaya çıkarmak ve bütünleştirmek amaçlanarak sorular oluşturulmuştur. Örnek bir soruya Şekil 2'de yer verilmiştir.

Şekil 2

Örnek Soru



Şekil 2' de verilen örnek soruda görüldüğü üzere verilen bir boş sayı doğrusu üzerinde öğrencinin 10/6 cm'lik uzunluğu göstermesi beklenmektedir. Öğrencinin bu sayı doğrusu gösteriminde parça-bütün ilişkisini ifade etmesi, sayı doğrusunun başlangıç noktasını belirleyebilmesi, belirlediği uzunlukları eşit olarak bölümlemesi ve birimleri belirlemesi beklenmektedir.

Sorular hazırlanırken cetvel, kırık cetvel, numaralandırılmamış boş sayı doğrusu, üçgen kare, dikdörtgen geometrik şekillerinin üzerinde uzunluk ölçme gibi çeşitli uzunluk niteliğine sahip modellerinin olmasına dikkat edilmiştir. Kapsam geçerliliği için matematik eğitimi alanında uzman öğretim elemanlarının görüşleri alınmış ve sorularda gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Çalışmada kullanılan en son formda 6 soru kullanılmıştır. Testin güvenirliğini sağlamak için dört öğrenci ile pilot çalışma yapılmıştır.

Veri analizi

Araştırmada öğrencilerle yapılan birebir görüşmelerin video kayıtları transkript edilerek dokümanlarda bulunan çözüm ve şekillerle birlikte düzenli olarak dosyaya kaydedilmiştir. Analiz için Lee ve Lee'nin (2020) Sfard'ın teorisine göre belirledikleri seviyeler dikkate alınmış ve Lee ve Lee'nin (2020) çalışmasından farklı olarak ölçmeye ve kesir gösterimine uzunluk modeli de araştırmacılar tarafından dahil edilmiştir ve uyarlanan profiller kullanılmıştır ve cevaplar seviyelere uygun profillere yerleştirilmiştir. Uzunluk modeline ilişkin soruların analizinde ise Lee ve Lee'nin (2020) çalışmasından farklı olarak ölçmeye ve kesir gösterimine uzunluk modeli de araştırmacılar tarafından dahil edilmiştir ve uyarlanan profiller kullanılmıştır. Öğrenci cevapları incelenip öncelikle uzunluk ve kesir sorularındaki seviyeler (Seviye 0, Seviye 1, Seviye 2 ve Seviye 3) belirlenmiş ve bu seviyelere göre de öğrencilerin yer aldıkları profiller (Profil 1, Profil 2, Profil 3 ve Profil 4) belirlenmiştir.

Profiller ve seviyeler belirlenirken yapılan bir örnek analiz şu şekildedir:

Öğrencilerden verilen bir cetvel üzerinde başlangıç noktası 1'den başlayıp 5.7' de biten bir kalemin uzunluğunu belirlemeleri istenmiş ve öğrencilerin başlangıç noktasını fark etmeleri, uzunluk birimini doğru bir şekilde belirleyerek kalemin uzunluğunu kesir olarak ifade etmeleri beklenmiştir. Bu soruya ilişkin örneğin O-Ö5 kodlu 7. sınıf öğrencisinin başlangıç noktasına dikkat etmeden sadece cetvel üzerindeki çizgileri saymış ve kesri 4 tam onda 7 olarak ifade etmesi gerekirken kalemin uzunluğunu 12 olarak ifade etmiştir. Öğrencinin bu şekilde çentikleri sayarak uzunluğu bulması öğrencinin uzunluk ölçme seviyesinin 0 olması ile ilişkilidir. Ayrıca öğrencinin kesirde bütüne dikkat etmemesi, parça- bütün ilişkisine önem vermemesi ve ifadeyi kesir olarak belirtememesi kesir bilgisi seviyenin 0 olduğunu göstermiştir. Böylece öğrencinin profili bu soruda Profil 1 olarak değerlendirilmiştir.

Çalışmada araştırmacı çalışmanın nerede, ne zaman yapıldığını, katılımcıların özelliklerini, katılımcıları belirlerken dikkate aldığı özellikleri, veri toplama araçlarını, veri analizini detaylandırarak anlatmıştır. Yani araştırmanın tüm süreci hakkında ayrıntılı betimleme yapmıştır. Bu araştırmada, araştırma hakkında bilgi sahibi olan uzman kişinin araştırmayı incelemesinin ve toplanan verilerin birebir görüşmeler, video kaydı ve görüşme esnasında öğrenciler tarafından tutulan notları inceleme yöntemi ile toplanarak yöntemde çeşitliğe gidilmesinin inandırıcılığı artırdığı düşünülmektedir. Araştırmacı, kodlamanın

güvenirliğini sağlamak için matematik alanında uzman bir kişiye verileri vererek kodlama güvenirliğini kontrol etmiştir. Yorumların tutarlı olup olmadığını belirlemek için araştırmacı elde ettiği verileri katılımcılara vererek katılımcı teyiti almış, onların uygun gördüğü yerler çalışmaya dahil edilirken uygun olmayan yerler çalışmadan çıkarılmıştır. Ayrıca çalışmada katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemi ile seçilerek araştırmanın aktarılabilirliği arttırılmıştır. Araştırmacı ve uzman tarafından yapılan kodlamaların tutarlılığı (Miles ve Huberman (1994) %90 olarak hesaplanmıştır. Analizde görüş ayrılığı ve görüş birliği olan kategoriler tartışılarak gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Araştırmada tutarlığı arttırabilmek için veriler farklı zamanlarda tekrar analiz edilerek iki analiz arasında tutarlılık sağlanmaya çalışılmıştır.

Bulgular

Bu bölümde analizde belirlenen ve araştırmanın amacına uygun temalar sunulmuştur. Araştırmanın amacı ortaokul öğrencilerinin uzunluk ve kesir anlayışlarını ortaya çıkarmaktır. Analizler yoluyla, hem uzunluk hem de kesir anlayışlarına ilişkin temalarını içeren dört ana tema ve bu temalar altında alt temalar tanımlanmıştır. Bu temalar Profil 1, Profil 2, Profil 3 ve Profil 4 tür. Profil 1 Ön içselleştirmeyi, Profil 2 içselleştirmeyi, Profil 3 Yoğunlaştırmayı, Profil 4 ise Yeniden Oluşturmayı ifade etmektedir. Bu profillerde yer alan öğrenciler Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2
Profiller ve İlgili Öğrenciler

Profiller	**İlgili Profilde Yer Alan Öğrenciler**
Profil 1 (Ön içselleştirme)	D-Ö3 (8. sınıf)
	O-Ö5 (7. sınıf)
	D-Ö6 (7. sınıf)
	O-Ö8 (6. sınıf)
Profil 2 (İçselleştirme)	O-Ö5 (7. sınıf)
	D-Ö9 (6. sınıf)
Profil 3 (Yoğunlaştırma)	O-Ö2 (8. sınıf)
	D-Ö3 (8. sınıf)
	D-Ö6 (7. sınıf)
Profil 4 (Yeniden Oluşturma)	İ-Ö1 (8. sınıf)
	O-Ö2 (8. sınıf)
	İ-Ö4 (7. sınıf)
	İ-Ö7 (6. sınıf)
	O-Ö8 (6. sınıf)
	D-Ö9 (6. sınıf)

Yukarıda belirtilen profillere ilişkin bulgular aşağıdaki bölümlerde ele alınmıştır.

1. Profil 1'e (Ön içselleştirme) ilişkin bulgular

Bu kategoriye dahil öğrencilerin, uzunluk ölçme ve kesir bilgi seviyelerinin 0 ve 1 arasında değiştiği, bu nedenle kesirleri ve uzunluk ölçmeyi anlama konusunda güçlük yaşadıkları söylenebilir. Yani, öğrencilerin uzunluk ölçme konusunda birimin ne olduğunu tanımadığı, uzunluk miktarını belirtirken birimini belirtmedikleri; kesirlerde ise eş parçalama kavramını anlamadıkları ve parça-bütün ilişkisinin farkında olmadıkları gözlemlenmiştir. Bu kategoride farklı sınıf seviyelerinden D-Ö3, O-Ö5, D-Ö6 ve O-Ö8

kodlu öğrenciler yer almıştır. D-Ö3, O-Ö5 ve D-Ö6 kodlu öğrenciler uzunluk modeli ile ilgili verilen 6 sorudan 5 tanesinde Profil 1 seviyesinde, O-Ö8 kodlu öğrenci 3 soruda Profil 1 seviyesinde iken 3 soruda Profil 4 seviyesinde yer almıştır. Bu özellikler göz önüne alınarak bu kategori altında "Çentik Sayma" ve "Nokta Sayma" gibi alt kategoriler belirlenmiştir. Ayrıca bu profil seviyesinde O-Ö8 kodlu öğrencinin bu durumu dikkat çektiği için cevapları tekrar incelenmiş ve O-Ö8 kodlu öğrencinin sayı doğrusu ve cetvel sorularında Profil 1 seviyesinde çentik sayarken, geometrik şekillerle verilen uzunluk modeli sorularında Profil 4 seviyesinde yer aldığı görülmüştür. Bu durumun sebebinin öğrencinin uzunluk ölçme konusunda geometrik şekillerde ezbere bilgiler kullandığı, sayı doğrusu temsili üzerinde ise birimi belirleyemediği ve kavramsal olarak uzunluk ölçmeyi belirlemede güçlük yaşadığı şeklinde ifade edilebilir.

1.1. Çentik Sayma

Bu alt kategorideki öğrencilerin iki çizgi arasındaki uzunluk yerine çentikleri uzunluk ölçme birimi olarak kabul etmesi uzunluk ölçme birimini tanımadığını göstermiştir. Bu kategoride D-Ö3, O-Ö5, D-Ö6, O-Ö8 kodlu öğrenciler bu kategoride yer almıştır.

D-Ö3 kodlu öğrenci verilen cetvel sorusunda başlangıç noktasına dikkat etmeyerek uzunluğu ondalık gösterim olarak sınırlı da olsa ifade edebilmiş ve m, cm, mm gibi birimleri doğru olarak kullanmıştır. Bunun aksine numaralandırılmamış boş sayı doğrusu verildiğinde ise çentik sayma eğiliminde olmuştur. Görüşmede öğrencinin cetvel sorusunda çentik saymayıp boş sayı doğrusunda çentik sayması çelişkili cevaplarından esasında onun birimi tanımadığı söylenebilir. Öğrenci bütünü eş parçalama ve kesirde bütünü matematiksel olarak ifade etmekte de zorluk yaşamış kesirleri uygun aralıklara yerleştirememiştir. Bu süreçte öğrenci ile araştırmacı arasında yaşanan diyalog aşağıdaki gibidir:

D-Ö3:6'ya koyacağım için şu aralardakini koymayacağım.1, 2, 3, 4, 5, 6 şurasıdır.

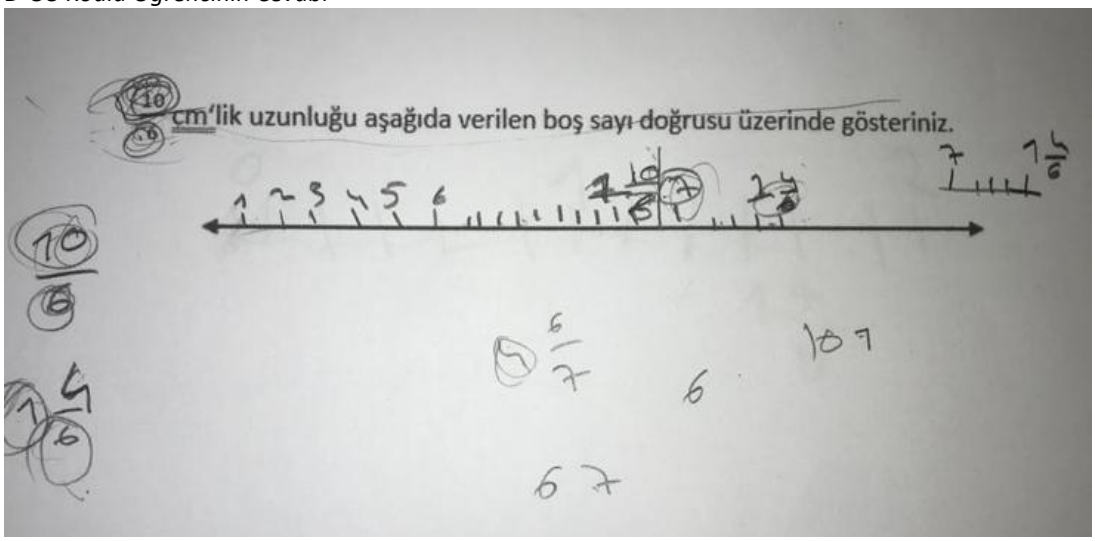
Araştırmacı: 6'nın yanına 10 tane çizgi koydun 10' un üstüne de 10/6 mı yazdın?

D-Ö3: Evet öyle olmayacak mı?

Araştırmacı: 7 tam nerde oluyor peki bu durumda?

D-Ö3: O da hemen burada oluyor. (Şekil 3'de son koyduğu çizginin yanına bir çizgi daha koyup orayı göstermiştir.)

Şekil 3
D-Ö3 Kodlu Öğrencinin Cevabı



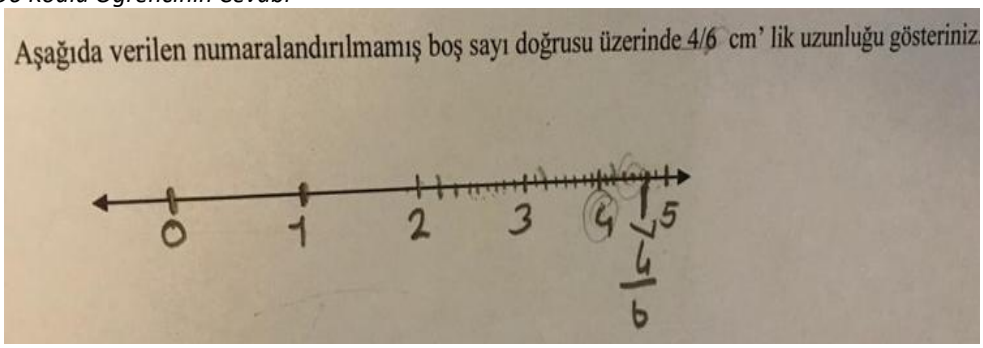
Başarı seviyesi düşük olan bu öğrencinin uzunluk ölçme ve kesir bilgi seviyeleri 0'dır. Öğrenci oluşturduğu sayı doğrusundaki çentikleri sayarak uzunluk birimini tanımadığını göstermiştir. Ayrıca

öğrenci kesir için her ne kadar kağıda $1\frac{4}{6}$ şeklinde yazsa da bir taraftan da $4\frac{6}{7}$ yazmış ve 10/6 şeklindeki bileşik kesri paydanın 6 olmasından dolayı 6 ile 7 arasında göstermiş, pay 10 olduğu için de 6 ile 7 arasındaki aralığı 10 parçaya bölmüştür (Bkz. Şekil 3). Bu durum da öğrencinin kesri anlayış seviyesinin 0 olduğunu göstermiştir. Yani öğrenci kesirde bütünün miktarını, eş parçalamayı ve başlangıç noktasını ifade edememiştir. Bu durum, D-Ö3 kodlu öğrencinin uzunluk ve kesir anlayışının tam oluşmadığını göstermiştir.

O-Ö5 kodlu öğrenci de tamın ne olduğunu ve kesri ifade edememiş verilen uzunluktaki çentikleri sayarak uzunluğu belirlemeye çalışmıştır. Böylece numaralandırılmamış boş sayı doğrusu sorularında da parçayı kaça bölmesi gerektiğinin, tamın, kesrin farkında olmadığını göstermiştir. Öğrenci verilen sayıları kesir yerine doğal sayı olarak düşünüp sayı doğrusu üzerinde rastgele yazıp işaretleme eğiliminde olmuştur. Bu durum öğrencinin uzunluk ölçme seviyesi ve kesri anlayış seviyesinin 0 olduğunu göstermiştir. D-Ö6 kodlu öğrenci de O-Ö5 kodlu öğrenci ile benzer şekilde yalnızca çentikleri sayma eğiliminde olmuştur. Verilen boş sayı doğrusu sorularında 4/6'ü gösterirken 4 ile 5 arasına 10 tane çentik atıp altıncı çentiği işaretlemiştir. Aralığı neden 10'a böldüğü sorulduğunda ise illa ona bölmek gerekmez 6'dan fazla herhangi bir sayıya da bölebileceğini ifade etmiştir. Bu durum öğrencinin eş parçalama, parça bütün bilgisi gibi kesre yönelik kavramları bilmediğini göstermiştir. Öğrencinin cevaplarından uzunluk ölçme bilgi seviyesi ve kesir bilgi seviyesi 0 olarak belirlenmiştir. D-Ö6 kodlu öğrencinin çizimi ve cevabı aşağıdaki (Bkz. Şekil 4) şekildedir:

Şekil 4

D-Ö6 Kodlu Öğrencinin Cevabı



D-Ö6: Bunların arasında 10 tane eşit parça var.

Araştırmacı: Neden 10 parça var?

D-Ö6: 4/6' ya 4 tam gidecek. Sonra arayı 10'a böleceğiz.

Araştırmacı: Arayı neden 10'a böldün?

D-Ö6: İlla 10 olması gerekmez aslında 6 tane gideceğiz ya 6'dan büyük olması lazım.

Araştırmacı: Nasıl yani?

D-Ö6: 6 tane gitmem gerekiyor 4 tamdan sonra.

Araştırmacı: Evet.

D-Ö6: Arayı 6'dan fazla olacak şekilde bölünce 6'yı işaretlerim.

D-Ö6: 7'ye bölelim mesela. (Araya 7 çizgi atıyor. 6. Çizgiyi işaretliyor.) Burası 4/6 olur.

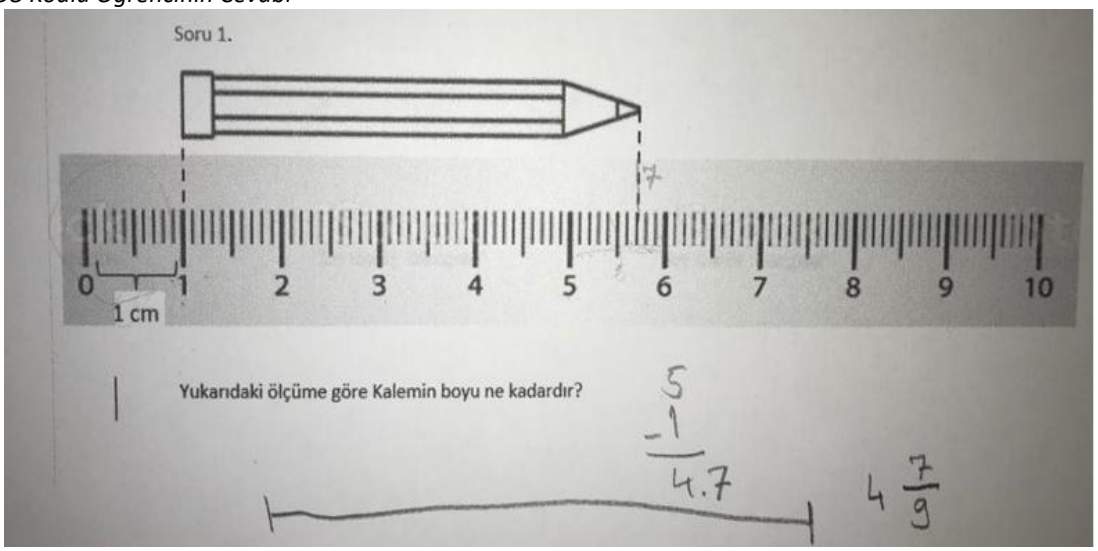
Araştırmacı: Hepsinin arasını mı bölüyorsun? Kaça bölüyorsun?

D-Ö6: 7'ye bölüyorum. (7 çizgi atıyor).

O-Ö8 kodlu öğrenci sayı doğrusu ve cetvel sorularında Profil 1 seviyesinde çentik sayarken, geometrik şekillerle verilen uzunluk modeli sorularında Profil 4 seviyesinde yer almıştır. Öğrencinin cetvel sorusunda uzunluk ölçme ve kesir bilgi seviyenin 1 olduğu görülmüştür. Öğrenci uzunluk birimini tanımayarak, yalnızca cetvel üzerindeki çentikleri saymıştır. Ayrıca O-Ö8 başlangıç noktasına dikkat ederek cetvel üzerindeki uzunluğu ondalık olarak ifade edebilmiş ancak kesir olarak sorulduğunda ifade etmekte zorlanmıştır. Bu durumda öğrenci kesirde parça bütün ilişkisini sınırlı anlayışla ifade ederek seviye 1'de yer almıştır. O-Ö8 kodlu öğrencinin cevabı (Bkz. Şekil 5) ve araştırmacı ile yaşadığı diyalog şu şekildedir:

Şekil 5

O-Ö8 Kodlu Öğrencinin Cevabı



O-Ö8: Burası 1 cm diyor. Burada (5 ile 6'nın arasını gösteriyor) 10 tane çizgi var.

Araştırmacı: Neredeki çizgileri saydın?

O-Ö8: İşte burada 10 çizgi var bu 5. Çizgi bu gösterdiği şey 7. Çizgi. Ama burası 5.7 olmayacak çünkü buradan da 1 cm önden başlamış. 5'den 1'i çıkarttığımızda 4 kalır.4,7 cm olur.

Araştırmacı: Kesir olarak yazsak ne yazarız?

O-Ö8: Imm kesirleri pek bilmiyorum ya. Şöyle bir çizsem. Nasıl okunuyordu?

O-Ö8: Burası 4 tam burası 7 burası da 9 olur.

Araştırmacı: Neden oraya 9 dedin?

O-Ö8: Çünkü buradaki aralıkta 9 tane çizgi var.

Araştırmacı: Arada 9 çizgi olunca 9 da 7 diyorsun öyle mi?

O-Ö8: Evet ikinci soruya geçelim artık.

Öğrenci verilen cetvel sorusunda kalemin ve cetvelin başlangıç noktasına dikkat etmiş kalemin başlangıç noktası 1'den başlamasına rağmen, başlangıcı sıfır kabul ederek sayma işlemini gerçekleştirmiştir. Bu durumda kalemin boyunun 4,7 olduğunu belirtmiştir. Ancak kesir olarak sorulduğunda öğrenci kesirleri bilmediğini ifade ederek 5 ile 6 arasındaki çizgileri saymış, 9 çizgi olduğu için de kesri 9'da 7 olarak ifade etmiştir. Buradan da öğrencinin uzunlukta birimi tanıdığı ancak kesri ifade edemediği söylenebilir.

1.2.Nokta sayma

Bu alt kategorideki öğrenciler, şeklin iç bölgesindeki ya da kenarları üzerindeki noktaları sayarak uzunluğu belirlemeye çalışmışlardır. Bu sayma yaklaşımı, uzunluğu ölçme anlayışları seviye 0 olan ve kesir anlayışları seviye 0 veya 1 olan öğrenciler tarafından kullanılmıştır. Öğrencilerden D-Ö3, O-Ö5 ve D-Ö6 kodlu öğrenciler soruların cevaplarını nokta sayma alt kategorisine uygun olarak belirlemiş olup Profil 1 seviyesinde yer almıştır. Öğrenciler genel olarak sayı doğrusu ve cetvel sorularında çentik sayma eğiliminde olurken geometrik şekil üzerinde verilen uzunluk ölçme sorularında ise nokta saymıştır. D-Ö3 kodlu öğrenci uzunlukların oranının sorulduğu bir soruda şeklin uzunluğu için şekilde verilen tüm noktaları saymış, kenar uzunluğu için ise sorulan parçanın üzerindeki noktaları sayarak iki sayıyı birbirine oranlamıştır. D-Ö3 kodlu öğrenci ile araştırmacı arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

D-Ö3: 16'da 4'ünü oluşturur.

Araştırmacı: Nasıl belirledin bunu?

D-Ö3: Noktaları saydım. (Şekil 6 üzerinde verilen tüm noktaları saymıştır.)

Araştırmacı: Peki 3/12 olur mu diye soruyor.

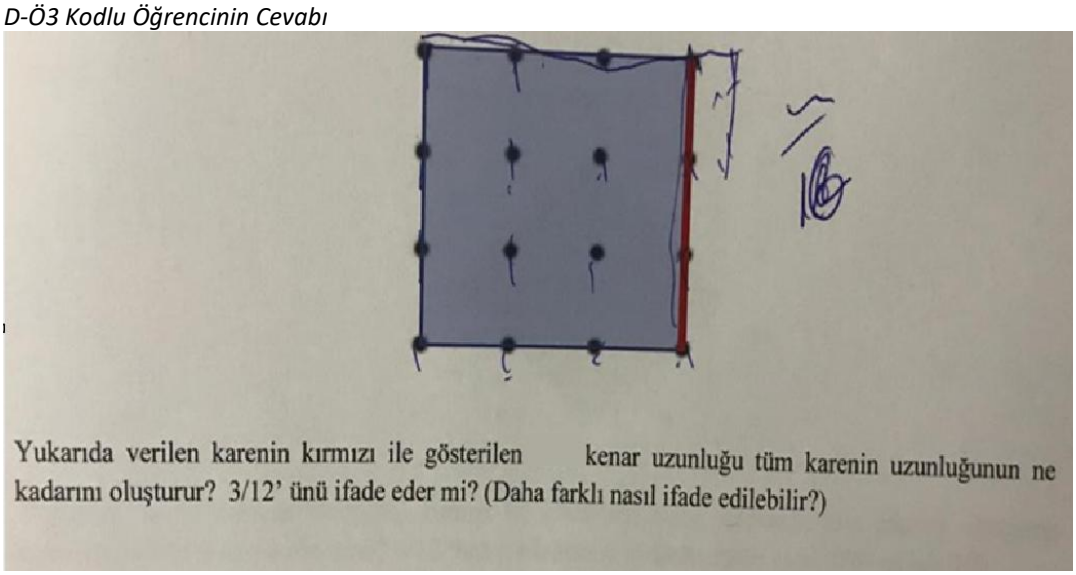
D-Ö3: Olmaz 4/16 olur. Karede 16 nokta var bu kenar 4 nokta.

Araştırmacı: Peki bunu başka nasıl ifade edebiliriz. Şeklimiz kare.

D-Ö3: Başka ifade edemeyiz.

Şekil 6

D-Ö3 Kodlu Öğrencinin Cevabı



Öğrenci karenin üzerindeki ve içindeki tüm noktaları sayarak 16, kırmızı çizgi ile gösterilen kenarın üzerindeki noktaları sayarak 4 sayılarını elde etmiştir. Bu soru için şeklin uzunluğunun kenar uzunluğuna oranını ise 4/16 olarak bulmuştur. Oranın 3/12 olup olmama durumu sorgulandığında ise öğrenci 3/12 olamayacağını ifade ederek 4/16 olacağını söylemiştir. Bu durum öğrencinin uzunluğu doğru belirleyemediğini göstermiştir. Bu durum öğrencinin uzunluk ölçme bilgi seviyesinin 0 olduğunu göstermiştir. Ayrıca öğrenci kesrin uzunluk modelini kullanmak yerine küme modelinden yararlanmış, yani nokta sayısı ile ilgilenmiştir.Bu sebeple öğrencinin kesir bilgisi seviyesi 1 olarak belirlenmiştir. Öğrenci kesri uzunluk modeli ile ifade edememiş ancak küme modeli için parça ve bütünü belirleyebilmiştir. Bu durumda öğrencinin kesri uzunluk modeli ile kullanımının sınırlı bir bilgi ile olduğu söylenebilir.

O-Ö5 ve D-Ö6 kodlu öğrenciler D-Ö3 kodlu öğrenciden farklı olarak sadece kenarlar üzerindeki noktaları saymışlardır. O-Ö5 ve D-Ö6 kodlu öğrencilerin uzunluk ölçme ve kesir anlayış seviyeleri 0 olarak belirlenmiştir. Örneğin, D-Ö6 kodlu öğrenci farklı bir soruda eşkenar üçgen üzerindeki ve içindeki noktaları sayarak bütünü 12, verilen bir kenar üzerindeki noktaları sayarak da parçayı 5 olarak hesaplamıştır. Bu durumda da kesrin 12'de 5 olduğunu ifade etmiştir. Ancak kesri yazarken 12/5 şeklinde yazmıştır. Bunun üzerine araştırmacı "12/5 ile 5/12 aynı kesri ifade eder mi?" diye sormuş ve öğrenci ikisinin de aynı şey olduğunu söylemiştir. Dolayısıyla D-Ö6 kodlu öğrenci cevabıyla hem uzunluk ölçmeyi doğru yapamadığını hem de kesir anlayışının eksik olduğunu göstermiştir. Her ne kadar cevabıyla kesirde parça ve bütün kavramlarını biliyormuş gibi olsa da kesrin nasıl yazıldığını bilememiş ve uzunluk modeli ile kesri ifade etmekte güçlük yaşamış, o yüzden öğrencinin kesir ve uzunluk ölçme anlayışı sıfır seviyesinde kalmıştır.

2.Profil 2'ye (İçselleştirme) İlişkin Bulgular

Bu kategoride yer alan öğrencilerin iki nokta arasındaki aralığın uzunluk birimi olduğunu ifade ederek uzunluk birimini tanıdığı, nesnenin uzunluğunu belirlerken de tahmine dayalı olarak kısmi birimleri birleştirdiği görülmüştür. Ayrıca bu kategori öğrencilerin kesirde eş parçalama yapıldığının farkında olunsa da bütünün uzunluğunun diğer parçalarla ilişkisini ve her parçanın diğer parçalarla ilişkisini bilmediği bir kategoridir. Bu kategorideki öğrencilerin uzunluk ölçme ve kesir anlayışları seviyesi 2 olarak değerlendirilmiştir. Bu durum, kesirlerin ve uzunluk ölçmenin öğrenciler tarafından kısmen anlaşıldığını göstermektedir. Profil 2'ye yalnızca D-Ö9 kodlu bir öğrenci dahil olmuştur. Seviye 2'de, parça-bütün ilişkisi yerine, eş parçalamanın farkında olma durumu vardır. Yani, bütünün uzunluğuyla parçaların uzunluğu arasındaki ilişki göz ardı edilerek, aralıkların sayısı karşılaştırılmaktadır.

D-Ö9 kodlu öğrenci Profil 2 seviyesinde olduğu sorularda hem uzunluk ölçmeyi hem de kesri sınırlı anlayışla ifade edebilmiştir. Bu öğrenci özellikle cetvel sorusunda başlangıç noktasına dikkat etmediğinden kesri belirleyemezken boş sayı doğrusu sorularında ise kesrin yerini doğru gösterebilmiştir. Geometrik şekil üzerinde verilen sorularda ise kare olanlarda tüm kenarları eşittir mantığı ile bir kenarın 4'te 1 şeklinde ifade edildiğini söylemiş ancak kesri genişletmek istediğinde şeklin içinden geçen doğru parçalarını da saymıştır. Örneğin bir kare sorusunda öğrenci ile aşağıdaki diyalog yaşanmıştır.

D-Ö9: 4 bölü 1'ini oluşturur. (1/4 olarak doğru yazıyor ama yanlış ifade ediyor sözel olarak-Bkz. Şekil 7)

Araştırmacı: Neden öyle oldu?

D-Ö9: Kenarları saydım. Dört parçanın bir parçasını çizmiş.

Araştırmacı: Peki 3/12 olur mu diye de soruyor.

D-Ö9: 12/3 olmaz (yine sözel olarak yanlış ifade ediyor) çünkü şöyle sıra sıra saysak bile.

Araştırmacı: Nereyi sayıyorsun sıra sıra?

D-Ö9: Yani şöyle içten geçen çizgilerle hepsini birlikte saysak, aaa oluyor aslında. 12 çıkıyor böyle, bu da 3 parça oluyor.

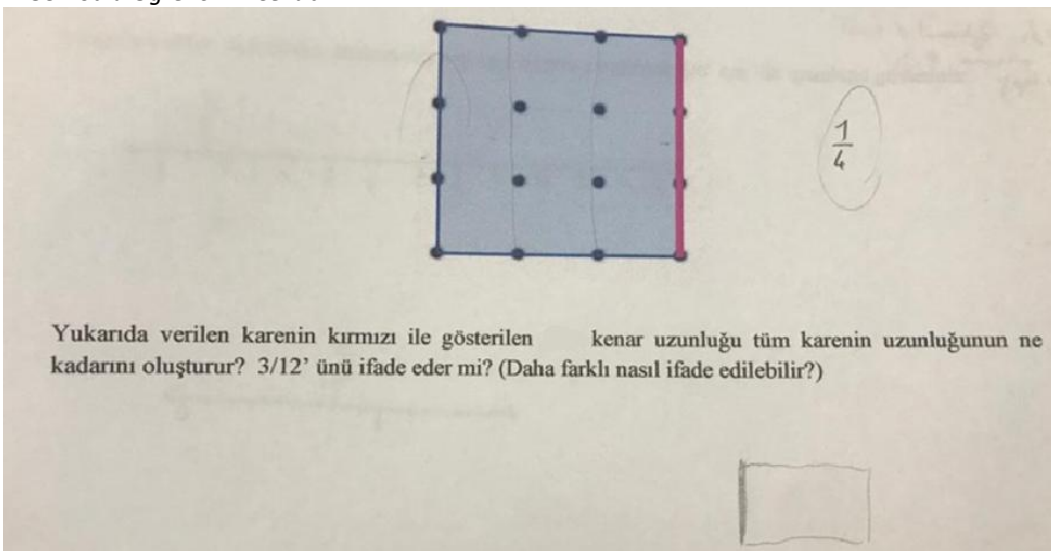
Araştırmacı: Peki ilk başta ¼ derken de böyle ortadan mı saymıştın?

D-Ö9: Yok onda sadece kenarlara bakmıştım dört eşit kenar var diye.

D-Ö9: 12'de 3 oldu yani.

Şekil 7

D-Ö9 Kodlu Öğrencinin Cevabı



Öğrenci verilen şekil kare olduğu ve bir kenar uzunluğu sorulduğu için 4'de birdir demiştir. Kenarları saydım dört parçanın bir parçası sorulmuş, kenarlarda eşit olduğu için 4'de biri ifade eder şeklinde parça bütün ilişkisini ifade etmiş ancak 12'de 3 kesri sorulduğunda içten geçen doğru parçalarının uzunluğunu hesaba katmıştır. Aslında öğrenci birimleri belirleyip uzunluğu doğru belirlemiş ancak çevre uzunluğu olarak karenin dört kenar uzunluğunu toplamayı düşünememiş, yani formül kullanarak bir hesaplama yapmamıştır. Birim ve birim kullanılarak tahmini ölçümlerin yapıldığı bu soruda öğrencinin uzunluk ölçme anlayışının seviye 2'de kaldığı söylenebilir. Ayrıca kesir anlayışında da eş parçalamanın ve parça-bütün ilişkisinin farkında olma durumu söz konusu olurken, kesirleri sözel olarak yanlış ifade etme durumu mevcut olmuştur. Öğrenci kesri ifade ederken "3/12" yazıp "12 bölü 3" şeklinde ifade etmiştir. Kesir kavramı konusunda yaşadığı bu kavram karmaşası öğrencinin kesir anlayışının seviye 2'de kalmasına sebep olmuştur.

Faklı bir soruda da kesir anlayışında benzer bir durum görülmüştür. Bir kalemin uzunluğunun belirlenmesinin istendiği soruda öğrenci, kalemin başlangıç noktasına dikkat etmeden başlangıcı bir kabul ederek kalemin boyunu 5 buçuk santimetreyi 2 birim geçmiş şeklinde ifade etmiştir. Yarım santimetreyi ve kalan birimleri ifade etmek için birimi düşünmüş ancak birimin milimetre olduğunu hatırlayamamış ve boyunun uzunluğunu da yanlış belirlemiştir. Kesir olarak ifade edilmesi istendiğinde ise 4 tam 10'da 7 kesrini 10' da 7 olarak yanlış bir şekilde ifade etmiştir.

3. Profil 3'e (Yoğunlaştırma) İlişkin Bulgular

Bu kategorideki öğrenciler, uzunluk birimlerini tanımlama yeteneğine sahiptir. Her bir uzunluk parçasındaki aralıkları sayarlar ve kısmi birimleri tahminlerle birleştirirler. Kesirlerde ise bütünün miktarını belirler, eş parçalamayi anlarlar ve parçalar ile bütün arasındaki ilişkiyi kavrarlar. Bu öğrencilerin uzunluk ölçme bilgi seviyesi 2 ve kesir bilgi seviyesi 3 olarak değerlendirilmiştir. Bu kategorideki öğrencilerin kesirleri iyi bir şekilde anladığı ancak uzunluk ölçme anlayışının sınırlı şekilde anlaşıldığı söylenebilir. O-Ö2, D-Ö3 ve D-Ö6 kodlu öğrenciler bu kategoride yer almıştır. O-Ö2 ve D-Ö6 kodlu öğrenciler özellikle cetvel sorularında başlangıç noktalarına dikkat etmemişlerdir.

Örneğin, bu kategoride yer alan O-Ö2 kodlu öğrenci ile araştırmacı arasında aşağıdaki gibi bir diyalog yaşanmıştır:

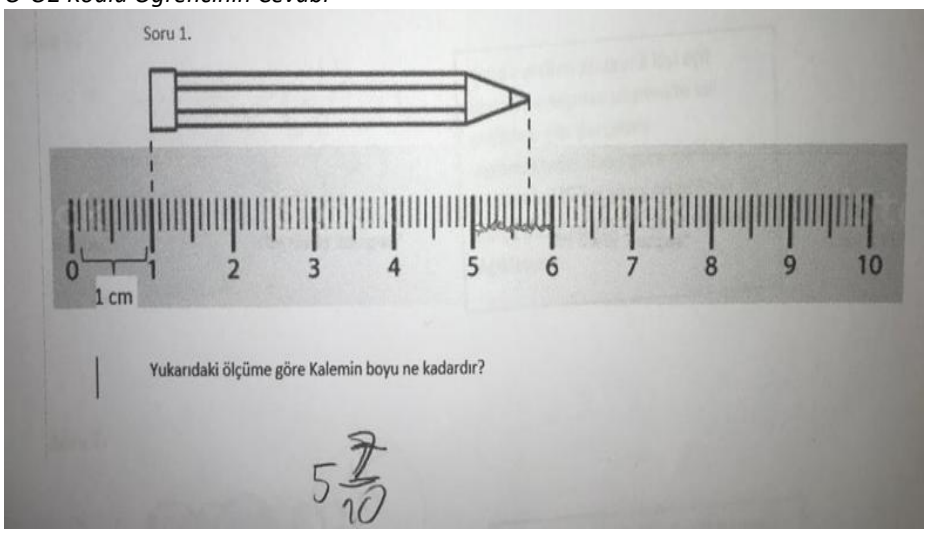
O-Ö2:1,2,3,4,5,6,7…Burası da 10, 5 tam 7/10 yapar.

Araştırmacı: Orda aralıkları mı saydın?

O-Ö2: Evet 7 tane var.

Şekil 8

O-Ö2 Kodlu Öğrencinin Cevabı



Diyalogdan görüleceği üzere, O-Ö2 kodlu öğrenci başlangıç noktasına dikkat etmeyip Profil 3 seviyesinde yer almıştır. Öğrencinin geometrik ölçme seviyesinin 2 olduğu yani başlangıç noktasına dikkat etmeden uzunluk birimini tanıdığı görülmüştür. Öğrencinin kesir bilgisi seviyenin ise 3 olduğu yani bütünün miktarını, eş parçalamayı ve parça bütün arasındaki ilişkiyi ifade edebildiği belirlenmiştir.O-Ö2 kodlu öğrenci diğer tüm sorularda Profil 4 seviyesinde yer alırken sadece cetvel sorusunda başlangıç noktasına dikkat etmeyerek Profil 3 seviyesinde yer almıştır.

4. Profil 4'e (Yeniden Oluşturma) İlişkin Bulgular

Bu kategorideki öğrenciler, uzunluk birimlerini tanıma becerisine sahiptirler. Geometrik özellikleri sayısal yapılarla ilişkilendirirler ve kesirlerde bütünün miktarını, eş parçalamayi ve parçalar ile bütün arasındaki ilişkiyi anlarlar. Bu öğrencilerin uzunluk ölçme ve kesir anlayışı seviyeleri 3 olarak belirlenmiştir. Bu durum, kesirlerin ve uzunluk ölçmenin iyi bir şekilde anlaşıldığını göstermektedir.

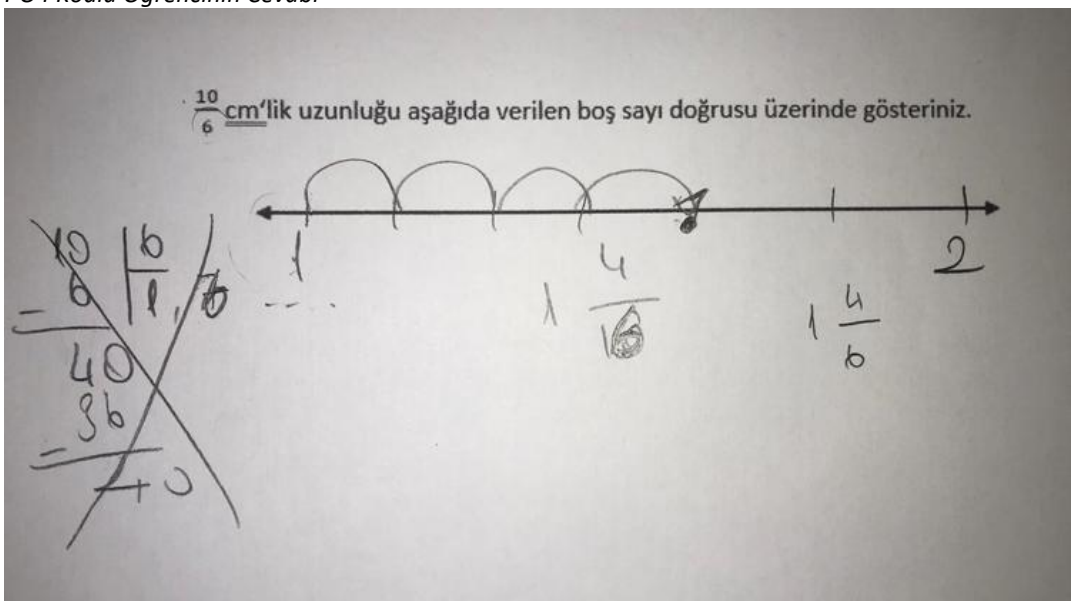
Öğrencilerden İ-Ö1, O-Ö2, İ-Ö4, İ-Ö7, O-Ö8 ve D-Ö9'un bazı sorularda bu profilde yer aldıkları belirlenmiştir. İ-Ö1 ve İ-Ö4 kodlu öğrenciler tüm sorularda Profil 4 kategorisinde yer almıştır. O-Ö2 kodlu öğrenci yalnız bir soruda Profil 3 seviyesinde yer alırken diğer tüm sorularda Profil 4'te yer almıştır. O-Ö8 kodlu öğrenci de üç soruda Profil 4 seviyesinde yer almıştır. İ-Ö7 kodlu öğrenci verilen soruların neredeyse tamamında Profil 4 seviyesinde yer almıştır. Görüldüğü üzere İ(iyi) kodu ile ifade edilen öğrenciler genellikle tüm kategorilerde kategori 4'te yer alırken D (düşük) ve O (orta) kodlu öğrencilerde değişkenlik olmuştur Soru bazında incelendiğinde de bu öğrencilerin genelde sayı doğrusu sorularını doğru yaptığı görülmüştür. Bunun sebebinin okullarda kesir modellerinden uzunluk modeli olarak sadece sayı doğrusu modeli üzerinde durulduğu ve öğrencilerin bu konuda fikirleri olduğu olarak düşünülmektedir.

D-Ö9 kodlu öğrenci uzunluk modeli için verilen 3 soruda Profil 2 seviyesinde yer alırken diğer 3 soruda Profil 4 seviyesinde yer almıştır. D-Ö9 kodlu öğrenci örneğin numaralandırılmamış boş sayı doğrusu üzerinde 4/6 basit kesrini gösterilmesi istendiğinde, önce verilen basit kesri 1 ile 2 arasında göstermiştir. Yine numaralandırılmamış boş sayı doğrusu şeklinde verilen bileşik kesir sorusunu yaptıktan sonra hatasını anlayıp basit kesirlerin 0 ile 1 arasında olması gerektiğini ifade ederek yeni sayı doğrusu çizip düzeltmiştir. Öğrenci öncelikle kesri boş sayı doğrusu üzerinde 1 ile 2 arasında göstermiş daha sonraki soruda bileşik kesri boş sayı doğrusunda gösterirken yanlış yaptığını fark edip basit kesri sayı doğrusunda gösterme sorusuna geri dönerek tamı olmadığını ifade ederek 0 ile 1 arasında göstermiştir. Öğrencinin bazı kavram karmaşaları bulunmaktadır ancak hatasını kendisi fark etmiştir.

Bu kategoride yer alan örneğin İ-Ö4 kodlu öğrenciye sorulan bir soruda öğrenci ile araştırmacı arasında aşağıdaki diyalog yaşanmıştır.

Şekil 9

İ-Ö4 Kodlu Öğrencinin Cevabı



İ-Ö4: Burda bileşik bir kesir vermiş mesela 10'u 6'ya bölelim (Bkz. Şekil 9).

Araştırmacı: Kesir olarak ifade etmen isteniyor aslında virgülle mi göstermek istiyorsun?

İ-Ö4: Hee tamam silmiyim o zaman kesir olarak bunu çevirdiğimizde 1 ile 2 arasında bir sayı.6' ya böleceğiz yine. 10'dan 6 çıkardığımızda 4 oluyor o yüzden 4 gideceğiz.

Araştırmacı: Peki 1 tamdan başlattın kesir olarak 1 tam orda neyi ifade eder?

İ-Ö4: 6/6 olur. Bu bileşik kesir olduğu için 6'sı bir tamın arasında kalan 4' ü 1 ile 2 arasında olur.

Araştırmacı: Tam yeri burası mı?

İ-Ö4: Hayır nokta koydum ya orası.

Öğrenciden bir bileşik kesri boş sayı doğrusunda göstermesinin istendiği soruda öğrenci bileşik kesri ifade edebilmiş ve öncelikle kesri tam sayılı kesir olarak ifade ederek bu tam sayılı kesri sayı doğrusunda doğru bir şekilde göstermiştir. Öğrencinin çözüm yaparken 10 dan 6 yı çıkarma sebebi 6'yı bir tam olarak alması yani kesrin tam kısmını 6/6 olarak belirlemesidir. Sonrasında öğrenci 4 birimi yineleyerek gitmiş ve 1 tam ile 2 tam arasında kesri doğru bir şekilde ifade edebilmiştir. Öğrenci soruda uzunluk için başlangıç noktası ve birime dikkat ettiği gibi kesirde de çeşitli işlemler yaparak hem uzunluk ölçmeyi hem de kesri sağlam bir şekilde anladığını göstermiştir.

Tartışma ve Sonuç

Çalışmada öğrencilerin uzunluk ölçme ve kesir anlayışlarının ortaya çıkarılması ayrıca kesri belirlerken uzunluk ölçme anlayışlarının nasıl kullanıldığının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Araştırmada öğrencilerin kesrin uzunluk modelleri ile verildiği sorulardaki cevapları ön içselleştirme, içselleştirme, yoğunlaştırma ve yeniden oluşturma şeklinde belirlenen dört kategoriye göre incelenmiştir. Öğrencilerden Ön içselleştirme (Profil 1) aşamasında D-Ö3, O-Ö5, D-Ö6, O-Ö8 kodlu öğrencilerin; içselleştirme (Profil 2) aşamasında O-Ö5 ve D-Ö9 kodlu öğrencilerin; Yoğunlaştırma (Profil 3) aşamasında O-Ö2, D-Ö3, D-Ö6 kodlu öğrencilerin, Yeniden Oluşturma aşamasında İ-Ö1, O-Ö2, İ-Ö4, İ-Ö7, O-Ö8, D-Ö9

kodlu öğrencilerin yer aldığı görülmüştür. Bu profillerdeki bilgi seviyelerine göre öğrencilerden elde edilen bulgular genellikle uzunluk ölçmede başarısız olanların kesri belirlemede de başarısız olduğunu, başarılı olanın ise kesri belirlemede de başarılı olduğunu göstermiştir. Yani genel olarak kesir belirleme uzunluk ölçme ile ilişkilidir denilebilir. Bu durumda kesirlerin daha iyi anlaşılmasını sağlamak adına öncelikle uzunluk ölçmedeki eksikliklerin giderilmesi faydalı olacaktır. Öyleki kesrin ne olduğunu ve nasıl yazıldığını öğrenci bilse de uzunluk ölçmeyi bilmediği taktirde kesirlerin uzunluk ölçme modelinin kullanıldığı sorularda öğrencinin başarısızlığı kaçınılmaz olabilir. Literatürdeki bazı çalışmalarda (Castro-Rodriguez ve diğ., 2016; Marmur ve diğ., 2020; Özçakır Sümen, 2022; Patahuddin, Usman ve Ramful, 2017) da öğrencilerin kesirleri ölçme açısından yorumlamada pek çok güçlük yaşadıkları; kesirlerde alan yorumlarını ölçüm yorumuna aktarmaları için yönlendirilmeleri gerektiği sonuçlarına ulaşılmıştır.

Çalışmada elde edilen sonuçlardan biri öğrencilerin profillere dağılımlarının başarı düzeyleri ile ilişkili olduğudur. Bu durumda başarılı öğrencinin uzunluk ölçme ve kesir anlayışının iyi olduğu, her iki konuyu da iyi bir şekilde anladığı ve kesri belirlerken de uzunluk modelinden yararlandığı söylenebilir. Profil 1 seviyesinde yer alan bu öğrencilerin başarı düzeyleri incelendiğinde ise orta ve düşük düzeyde olduğu dikkat çekmiştir. Profil 4 seviyesinde yer alan bu öğrencilerin başarı düzeyleri incelendiğinde ise iyi ve orta düzeyde olduğu dikkat çekmiştir. Bu sebeple öğrencilerin yığıldığı Profil 1 ve Profil 4 seviyelerinin öğrencilerin kesir anlayışı ve uzunluk ölçme kavram oluşturma temelini ve öğrencilerin başarı düzeylerini ortaya çıkardığı düşünülmektedir. Başarı durumu iyi ve orta olan öğrenciler kesir kavramını ifade edebilmiş, uzunluk ölçmeyi ilişkilendirebilmiştir. Başarı durumu düşük olan öğrenciler ise kesir kavramını ifade etmekte ve uzunluk ölçme ile ilişkilendirmekte zorlanmışlardır. Benzer şekilde Özçakır Sümen (2022) yaptığı araştırmada başarı düzeyi yüksek ve orta seviyede olan öğrencilerin kesir kavaramına ilişkin zengin bir zihinsel haritalarının olduğunu belirtmiştir. Bu sonuçta istisna bir durum olarak Profil 4 seviyesinde bulunan D-Ö9 kodlu öğrencinin başarı düzeyinin düşük olduğu dikkat çekmiştir. D-Ö9 kodlu öğrenci 6 sorudan dördünde Profil 2' de yer alırken 2 soruda Profil 4'te yer almıştır. Bu öğrencinin özellikle cetvel sorularında başlangıç noktasına dikkat etmeme, boş sayı doğrusu sorularında da kesrin verildiği tam sayı aralıklarını belirleyememe gibi durumlar olmuştur. Öğrencinin Profil 4 seviyesinde olduğu sorular kare ve üçgen gibi geometrik şekiller üzerinde verilen sorulardır. D-Ö9 kodlu öğrencinin bu sorularda Profil 4 seviyesinde olmasının sebebi bilinen ve sıkça kullanılan geometrik şekillerin çevre uzunluklarını daha iyi anlamış olmaları olabilir.

Uzunluk modeline ilişkin bulgulardan elde edilen sonuçlarda sınıf seviyesi veya yaş gibi değişkenlerin, belirlenen uzunluk ölçme ve kesir anlayışı seviyeleriyle ilişkili olmadığı gözlemlenmiştir. Yani, bu özellikler profil oluşumunda belirleyici değildir. Örneğin, 6. sınıf öğrencisi olan öğrencilerin Profil 4 seviyesinde cevaplar verebildiği görülürken, 8. sınıf seviyesinde olan öğrencilerin Profil 1 kategorisine uygun cevaplar verebildiği görülmüştür. Uzunluk ölçme ilkokul ve 5. sınıf seviyesinde görülen bir konu olup, ilerleyen sınıf seviyelerinde bu konuya dair kazanımlar yer almamaktadır. Daha yakın zamanda öğrenmeleri ve modellemeye daha yatkın olmaları sebebiyle alt sınıflardaki öğrenciler uzunluk ölçme ve kesri uzunluk modeli ile açıklamada daha başarılı olabilirler. Ancak çalışmada elde edilen sonucun aksine Gürbüz ve Birgin (2008) öğrencilerin öğrenim seviyesi yükseldikçe, geometrik modellerle ve sayı doğrusu gösterim biçimleriyle işlem yapma becerilerinin arttığını belirtmiştir. Dolayısıyla sınıf düzeyi ne olursa olsun öğrencilerde kavramsal anlayışı oluşturmak için öğrenilen kavramın farklı gösterimlerine de yer vermek önemlidir.

Çalışmada öğrencilerin numaralandırılmış ve numaralandırılmamış sayı doğrularında farklı performanslar sergiledikleri, numaralandırılmış sayı doğrusunda uzunluk birimini tanıyarak daha başarılı ölçümler yaptıkları görülmüştür. Öğrenciler genelde hazır verilen eşit bölümlenmiş cetvel sorularında başlangıç noktasına dikkat etmemiş ve cetvel üzerinde bitiş noktasında bulunan son sayıyı okuma eğiliminde olmuşlardır (D-Ö3, O-Ö2, O-Ö5, D-Ö6, D-Ö9 kodlu öğrenciler). Numaralandırılmamış boş sayı doğrusu sorularında ise eş parçalama yapamamış ve aralık yerine çentik saymışlardır. Örneğin; D-Ö3 kodlu öğrenci verilen cetvel sorusunda başlangıç noktasına dikkat etmeyerek ondalık olarak uzunluğu sınırlı da olsa ifade edebilmiş ve m, cm, mm gibi birimleri doğru olarak kullanmasına rağmen numaralandırılmamış boş sayı doğrusu verildiğinde çentik sayma eğiliminde olarak uzunluk birimini tanımamıştır. D-Ö3 kodlu öğrencinin boş sayı doğrusu sorularında ön içselleştirme aşamasında olması

dikkat çekmiştir. Elde edilen bulgulara benzer şekilde Solomon vd. (2015) de öğrencilerin nesnenin cetvel üzerinde verilen bitiş noktası olan sayıyı okuma eğiliminde olduğunu, cetveldeki sayılar silindiğinde ise çentik saydıklarını iddia etmişlerdir. Güven Akdeniz ve Argün'ün (2019) çalışmasında da benzer bulgulara rastlanmış, öğrencilerin ilk önce cetvel üzerinde gördüğü son sayıyı okumaya çalıştıkları, daha sonra çentik saydıkları görülmüştür. Stephen ve Clements (2003) ise öğrencilerin cetveli ve birimlerini kavramsallaştıramadıkları için bu tip stratejiler geliştirdiklerini ifade etmiştir. Kamii (1995) tarafından bu durum uzunluğun yer kaplama özelliğinin öğrenciler tarafından fark edilmemesi nedeniyle olduğu ifade edilmektedir. Lehrer'e (2003) göre de öğrenciler ölçme kavramını cetvel okuma olarak gördüğü sürece uzunluk ölçmeyi anlamayacaktır. Dolayısıyla çentik sayma eğiliminde olup cetvelde başlangıç noktasına dikkat etmeyen öğrencilerin cetvelle yapılan ölçmeyi, birimlerin yinelenmesini, kesir temsilleri ve ölçme arasındaki ilişkiyi anlamlandıramayacakları açıktır. Literatürdeki çalışmalar öğrencilerin birim, birimleştirme gibi ölçme kavramlarındaki eksiklikleri, öğrencilerde kesrin ölçme anlamının oluşturulması için engel teşkil ettiğini belirtmiştir (Bakırcı Saymaz ve Argün, 2022; Hacker vd, 2019). Çalışmamızda verilen başlangıç noktası değiştirilmiş cetvel ve boş sayı doğrusu örnekleri öğrencilerin bu kavramı anlamlandırıp anlamlandıramadığını da ifade etmek için uygun alıştırmalar olmuştur. Ayrıca Van de Walle vd. (2013) öğrencilerin uzunluk ölçmede aralığı saymalarını sağlayabilmek için bir sayı doğrusu veya cetvelde sayıların her bir birimin ortasına yazılmaları gerektiğini iddia etmiştir. Yani birimin sonuna yazılacak sayının öğrencide çentik sayma eğilimini artırdığı söylenebilir.

Çalışmada öğrencilerin sayı doğrusu ve cetvel sorularında çentik sayma eğiliminde olurken geometrik şekil üzerinde verilen uzunluk modeli sorularında nokta ya da içten geçen çizgileri sayma eğiliminde oldukları sonucuna varılmıştır. Örneğin D-Ö9 kodlu öğrenci kare şeklinde verilen sorularda şekil kare olduğu için ezbere bir şekilde bir kenar uzunluğu dörtte birdir diyebilmiştir. Bu durum öğrencilerin matematiksel işlemlerle veya ölçmekte zorlandıkları görevlerde görünüşe bakarak, ezbere değerlendirme yaptıkları (Bozkurt vd., 2018) anlayışını destekler niteliktedir. Ayrıca öğrenciler kesrin genişletilmiş halini bulabilmek için de karenin içinden geçen çizgileri saymıştır. Marshall (1997) bu durumu öğrencilerin alan ve çevreyi kavramsal olarak birbirinden ayırt edememesine bağlamıştır. Bu anlamda nesnenin uzunluğunun nesnenin sınır çizgisi olduğunu kavratmakta faydalı olacağı düşünülmektedir. Bunun için nesnelerin kağıt üzerinde bıraktıkları izlerin çizilerek uzunluklarının hesaplanmasına yönelik alıştırmalar yapılması önerilebilir. Aynı zamanda geometrik şekil üzerinde verilen uzunluk modeli sorularında öğrencilerin parça-bütün ilişkisi bilgileri incelenmiş, öğrencilerin bütünü belirlemede ve birimi bulmakta güçlük yaşadığı görülmüştür. Esasında öğrenci nesnenin uzunluğunu ölçmeyi bilmediğinden nesnenin uzunluğu ve bir kenar uzunluğuna yönelik de parça bütün ilişkisini ifade edememiştir. Yani nesnenin uzunluğunun nasıl hesaplandığını bilmeyen ve de doğru bir şekilde hesaplayamayan öğrenciler uzunluğun kesrin bütünü olduğunu da söyleyememişlerdir. Aslında kesrin parça/bütün olarak ifade edildiğini bilseler de bunu uzunlukta doğru bir şekilde uygulayamamış, özellikle bütünü yanlış belirlemişlerdir. Yani, kesirlerin kavramsal anlamı, ölçüm fikriyle başlamalı ve bu, birim yinelemenin zihinsel aktivitesine dayanmalıdır (Bakırcı Saymaz ve Argün, 2022). Bu yaklaşım, öğrencilerin doğal sayılar üzerindeki çalışma şekillerini yeniden düzenleyerek kesirlerin inşası için sağlam bir temel oluşturacaktır (Simon vd., 2018; Wilkins and Norton, 2018).

Öğrencilerden bazıları numaralandırılmamış sayı doğrusu sorularında çentikler çizmiş ve kesir olduğu için değerini çentiklerin üzerine değil de çentikler arasına yazmıştır. Bu da öğrencilerin sayı doğrusunu kavramsallaştıramadığını göstermektedir. Bu bulgular, Pesen'in (2008) sayı doğrusundaki kavramsal yanılgılar ve öğrenme zorlukları üzerine yaptığı çalışmanın sonuçlarıyla uyum göstermektedir. Patahuddin, vd. (2017) öğrencilerin kesirleri sayı doğrusunda ölçme açısından yorumlamada pek çok güçlük yaşadıklarını; kesirlerde alan yorumlarını ölçüm yorumuna aktarmaları için yönlendirilmeleri gerektiği sonuçlarına ulaşmışlardır. Benzer şekilde bu çalışmada da öğrencilerin kesirlerin sayı doğrusu üzerindeki gösteriminde, bütünü parçalara ayırma konusunda zorlandıkları belirtilmiştir. Çünkü kesirlerin alan modellerinde bütün belirgindir ancak sayı doğrusunda verilen ölçüm modelinde tam sayılar arasında olacak şekilde bir sayı doğrusunun üzerinde birden fazla bütün vardır ve öğrencilerin sayı doğrusu üzerindeki kesir kavramını tam anlamıyla öğrenebilmesi için dikkatli bir öğretim yaklaşımı gereklidir (Bright vd., 1988; Zhang vd., 2015). Benzer şekilde Okur ve Çakmak Gürel'in (2016)

çalışmasının sonucunda öğrencilerin en fazla parça-bütün ilişkisini belirleme konusunda kavram yanılgısına sahip olduğu ifade edilmiştir.

Genel olarak bakıldığında bu çalışmanın öğrencilerin kesir bilgilerini ortaya çıkardığı, Profil 1 ve Profil 4'te neredeyse aynı öğrencilerin bulunduğu, uzunluk ölçme anlayışı iyi olmayanın benzer şekilde kesir anlayışının da zayıf olduğu bu iki konunun birbiri ile ilişkili olduğu söylenebilir. Özellikle uzunluk ölçmeyi bilemeyen öğrenciler buna bağlı olarak kesirde de parça ve bütünü belirleyememiştir. Benzer şekilde Topçu ve Gürefe (2020) yaptıkları çalışmada uzunluk modeline ilişkin sorularda öğrencilerin model ile ilgili soruları cevaplarken kesir bilgisi ile ilgili eksikliklerden kaynaklı hatalar yaptıklarını ifade etmiştir. Örnek olarak bileşik kesir düzeneği modelinde ikinci bir bütün olşturma ya da tek bir parça ekleme konusunda kararsız kaldıklarını, bu durumunda bileşik kesir konusundaki eksikliklerden kaynaklandığı tespit etmişlerdir.

Öneriler

Çalışmanın sonuçları doğrultusunda eğitim fakültelerine, araştırmacılara ve matematik öğretmenlerine çeşitli öneriler sunulmuştur. Bu öneriler, bulguların uygulamaya aktarılması ve ilgili alanda gelişim için önemli adımlar içermektedir.

Can (2019) öğretmenlerin kesirlerde kavramsal bilgi yönünden yetersiz olduğu, gerçekçi günlük hayat problemi oluşturmada zorluk yaşadıkları ve öğrencilerin kavram yanılgılarını ifade etmede yetersiz kaldıklarını ifade etmiştir. Duran (2017) ise öğretmen adaylarının kesirler ve kesirlerle işlemlerin temsili konusunda alan modeli kullanma eğiliminde olduklarını, en az uzunluk modelini tercih ettiklerini, öğretmen adaylarının derse hazırlık, ön bilgi hatırlatmalarını yaptıkları ancak derste öğrencileri farklı temsiller oluşturmaları konusunda teşvik etmediklerini gözlemlemiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının alan bilgilerinin sınıf içi öğretimlerine de yansıdığı sonucuna ulaşmıştır. Bu sebeple öğretmenlerin modeller hakkında bilgilerinin artırılması için hizmet içi eğitimler verilmesi ve öğretmen adaylarının lisans eğitimlerinde modeller konusunda bilgi birikimlerinin artırılması gerekmektedir.

Bulgularımız sadece öğrencilerin problemlere yaklaşımlarının geçerliliğine değil aynı zamanda öğrencilerin temel matematiksel kavramları açıklamada ve bütünleştirmede başarılı olup olmadığını göstermektedir. Battista (2017) ve Mitchell (2011) in çalışmalarında belirttiği gibi kesir kavramını öğretme sorumluluğunda olan matematik öğretmenleri, matematiğin farklı alanları arasında bağlantılar kurarak ve birden fazla matematiksel alanı bütünleştiren görevleri tasarlayarak etkinlikler geliştirmelidirler. Çünkü Gökkurt vd. (2015) öğretmenlerin çoğunun kesirlerin öğretimine doğru etkinliklerle başladıkları ancak kullandıkları modellerde ve kullanım sırasında eksik bilgilere sahip oldukları tespit etmiştir.

Öğrencilerin uzunluk ölçmeyle ilgili yanılgılarını göz önünde bulundurursak;, öğrencilerin cetvelde tekrarlı birimlerin kullanıldığını ve çentik saymanın ölçme işlemine dair bir anlam ifade etmediğini anlamaları önemlidir (Güven Akdeniz ve Argün, 2018).

Öğrenciler sayı doğrusunda zorlanırken, şekillerin üzerinde verilen noktaları değil noktalar arası uzunluğu saymışlardır. Sayı doğrusu problemlerinde uzunluk birimini tanımayan ve çentikleri sayarak çalışan öğrenciler, noktalı kâğıt üzerinde verilen sorularla birlikte uzunluk birimini doğru bir şekilde belirleyip şeklin çevresini doğru hesaplayabilmişlerdir. Bu sebeple, sayı doğrusu modeli öğretildiğinde parça-bütün ilişkisi vurgulanmalı, öğrencilere boş sayı doğrusu, kırık cetvel gibi çeşitli gösterimler de sunulmalıdır. Ayrıca, kesirlerin sayı doğrusu üzerindeki görsel anlamı göz önünde bulundurularak sembollerle ilişkilendirme yapılmalıdır.

Hershkowitz ve Vinner (1980), öğrencilerin düşünmesi için genellikle tanımlara değil, daha çok ilişkilendirebildikleri zihinsel resimler ve kavramların imgelerine ihtiyaç duyduğunu ifade etmektedirler. Yani öğretmenlerin öğrenme sürecinde öğrenciye bu ortamı sağlaması gerekmektedir.

Bu tür araştırmalar öğretmen adaylarıyla yapıldığında öğretmen adaylarının içerik bilgisini genişletmeleri konusunda farkındalık yaratacağı düşünülmektedir (Ball vd., 2008). Çetin (2020) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesir konusundaki bilgi düzeylerinin, daha çok kavramsal

bilgilerden ziyade işlemsel bilgiye dayalı olduğu sonucuna varmıştır ve öğretmen adaylarının kavramsal öğreniminin ve farkındalığının artırılması bu anlamda oldukça önemlidir.

Yazar Katkı Oranı

Araştırmanın yazarları araştırmanın planlanmasından sonuç raporunun yazılmasına kadar tüm aşamalarda eşit bir şekilde katkı sunmuşlardır.

Etik Beyan

"Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesinde' yer alan tüm kurallara uyulmuş ve yönergenin ikinci bölümünde yer alan "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemlerden" hiçbiri gerçekleştirilmemiştir. Bu araştırma, Uşak Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu'nun 09.09.2021 tarih ve 2021-168 sayılı kararıyla etik açısından uygun bulunmuştur.

Çatışma Beyanı

Yazar çalışma kapsamında herhangi bir kurum veya kişi ile çıkar çatışması bulunmadığını beyan etmektedirler.

References

Adams, W.C. (2015) Conducting Semi-Structured Interviews. In: Wholey, J.S., Harty, H.P. and Newcomer, K.E., Eds., Handbook of Practical Program Evaluation, Jossey-Bass, San Francisco, 492-505. https://doi.org/10.1002/9781119171386.ch19

Akdeniz, D. G., & Argün, Z. (2019). A case study of the length conceptions of fifth grade students. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 13(2), 807-836. https://doi.org/10.17522/balikesirnef.537618

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal Of Experimental Child Psychology*, 113(3), 447-455. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.06.004

Bakırcı Saymaz, C., & Argün, Z. (2022). Matematik Öğrenme Güçlüğüne Sahip Öğrencilerin Kesir Kavramına İlişkin Kavrayışlarının İncelenmesi. Gazi Eğitim Bilimleri Dergisi, 8(3), 333-369.

Ball, D. L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/00224871083245

Battista, M. T. (2012). *Cognition based assessment and teaching of geometric measurement* (*Length, Area, and Volume): Building on students' reasoning.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Barnett-Clarke, C., William, F., Rick, M., Sharon, R., & Rose, M. Z. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers: Grades 3–5.* Reston

Baykul, Y. (2009). *İlköğretim matematik öğretimi (6-8 sınıflar)*. Ankara: Pegem Yayıncılık.

Barrett, J. E., Jones, G., Thornton, C., & Dickson, S. (2003). Understanding children's developing strategies and concepts for length. *Learning and Teaching Measurement*, 17-30.

Behr, M.J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct, in T.P. Carpenter, E. Fennema and T.A. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Erlbaum, Hillsdale, NJ, pp. 13–47.

Birgin, O., & Gürbüz, R. (2009). İlköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 22(2), 529-550.

Bozkurt, A., Özmantar, M. F., & Güzel, M. (2018). Uzunluk ölçme ve farklı uzunlukları karşılaştırmaya dair öğrenci düşünüşlerinin incelenmesi [A study on students' ways of thinking on length measurement and the comparison of different lengths.*] International Journal of Educational Studies in Mathematics*, 5(2), 39-55.

Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for research in mathematics education*, 19(3), 215-232. https://doi.org/10.2307/749066

Can, H. N. (2019). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin kesirlerde işlemler konusu ile ilgili pedagojik alan bilgilerinin öğrenci zorlukları ve kavram yanılgıları bileşeninde incelenmesi* [Examination of secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge of fraction operations with regard to students' difficulties and misconceptions]. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L., ve Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics,* 92, 129–146. doi:10.1007/s10649-015-9673-4

Chapin, S. H., & Johnson, A. (2006). *Math matters: Grades K-8 understanding the math you teach.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005, July). Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research. In Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, No. 2, pp. 233-240). Melbourne: PME.

Cramer, K., & Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition of fractions. *National Council of Teachers of Mathematics*, 41-48.

Cramer, K., & Whitney, S. (2010). Learning rational number concepts and skills in elementary classrooms. In D. V. Lambdin & F. K. Lester (Eds.), Teaching and learning mathematics: Translating research to the elementary classroom (pp. 15–22). Reston, VA: NCTM.

Çelik, B., & Çiltaş, A. (2015). Beşinci Sınıf Kesirler Konusunun Öğretim Sürecinin Matematiksel Modeller Açısından İncelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 10(1*), 180-204.

Çetin, İ. (2020). Ortaöğretim öğrencilerinin matematik umutsuzluğunu yordayan değişkenler: matematik kaygısı, matematiğe yönelik motivasyonel inançlar, matematik başarısı (Köşk İlçesi Örneği) [Variables affecting the mathematics hopelessness of secondary school students: Mathematic anxiety, motivational beliefs towards mathematics, mathematics success (Köşk district example)]. Yayımlanmış Doktora Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi, Aydın.

Duran, N.B. (2017). *Ortaokul matematik öğretmen adaylarının alan ve pedagojik alan bilgileri çerçevesinde kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin öğretimine ilişkin kullandıkları modeller*. Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, Denizli.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique. *In Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

Gökkurt, B., Soylu, Y., & Demir, Ö. (2015). Ortaokul matematik öğretmenlerinin kesirlerin öğretimine yönelik görüşlerinin incelenmesi [Examining the opinions of secondary mathematics teachers on teaching fractions]. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 9(2), 230-251. https://doi.org/10.17522/nefefmed.23191

Gürel, Z. Ç., & Okur, M. (2016). Ortaokul 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki kavram yanılgıları [6th and 7th Grade Secondary School Students' Misconceptions about Fractions]. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(2), 922-952. https://doi.org/10.17556/jef.30116

Hackenberg, A. J., & Lee, M. Y. (2015). Relationships between students' fractional knowledge and equation writing. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(2), 196-243. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.2.0196

Hacker, D., Kiuhara, S. A., & Levin, J. R. (2019). A metacognitive intervention for teaching fractions to students with or at-risk for learning disabilities in mathematics. *ZDM– The International Journal on Mathematics Education,* 51, 601–612.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In Proceedings of the 4th PME conference (pp. 177-184). The Weizmann Institute of Science.

Kamii, C., & Clark, F. B. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics*, 97(3), 116-121. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1997.tb17354.x

Kavuncu, T., & Yenilmez, K. Ü. R. Ş. A. T. (2021). Beşinci sınıf öğrencilerinin kesir modellerine uygun problem kurma ve çözme becerilerinin incelenmesi. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Türk Dünyası Uygulama ve Araştırma Merkezi Eğitim Dergisi,* 6(2), 201-218.

Kayhan, H. C., & Argün, Z. (2014). İlköğretim öğrencilerinin uzunluk ölçme aracının çalışma biçimini bilme ve kullanma durumları arasındaki ilişki. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 31(2), 479-496.

Kieren, T. E. (1976, April). On the mathematical, cognitive and instructional. In Number and measurement. Papers from a research workshop (Vol. 7418491, p. 101).

Lee, M.Y. & Hackenberg, A.J. (2014). Relationships between fractional knowledge and algebraic reasoning: The case of willa. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12 (4), 975-1000. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9442-8

Lee, M. Y., & Lee, J. E. (2020). Spotlight on area models: Pre-service teachers' ability to link fractions and geometric measurement. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(5), 1079-1102. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10098-2

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, 179-192.

Macit, E. (2019). İlköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin rasyonel sayı ve kesir kavram imajları [Concept ımages for rational number and fraction of the students at the elementary mathematics education department]. *İnönü Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 6(11), 50-62. https://doi.org/10.29129/inujgse.547277

Marmur, O., Yan, X., ve Zazkis, R. (2020). Fraction images: The case of six and a half. *Research in Mathematics Education,* 22, 22-47. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1627239

MEB, (2018). *Matematik dersi öğretim programı ve kılavuzu (1.-8. sınıflar).* Ankara.

Mitchell, A. E. (2011). *Interpreting students' explanations of fraction tasks, and their connections to length and area knowledge.* Doctoral dissertation, Australian Catholic University, Australia.

NCTM. (2006). *Principles and standards for school mathematics*. Va: National Council of Teachers of Mathematics Pub

Newstead, K., & Murray, H. (1998, July). Young students' constructions of fractions. In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3, 295-303. Stellenbosch, South Africa.

Olive, J., & Steffe, L. P. (2010). *The construction of fraction schemes using the generalized number sequence. In Children's fractional knowledge* (pp. 277-314). Springer, Boston, MA.

Olkun, S. & Toluk U.Z., (2007). *İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi.* Ankara: Maya Akademi.

Outhred, L., & McPhail, D. (2000). A framework for teaching early measurement. In Proceedings of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 23, 487- 494. Fremantle, WA: MERGA.

Outhred, L., Mitchelmore, M., McPhail, D., & Gould, P. (2003). Count me into measurement: A program for the early elementary school. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: Yearbook*, (pp. 81-99). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Özçakır Sümen, Ö. (2022). Dördüncü sınıf öğrencilerinin kesirler konusuna ilişkin zihinsel yapılarının incelenmesi. *e- Kafkas Eğitim Araştırmaları Dergisi,* 9, 1-19. https://doi.org/10.30900/kafkasegt.948020

Özdemir, D., & Özçakır, B. (2019). Kesirlerin öğretiminde artırılmış gerçeklik etkinliklerinin 5. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarına ve tutumlarına etkisinin incelenmesi. *Adıyaman University Journal of Educational Sciences*, 9(1), 21-41. https://doi.org/10.17984/adyuebd.495731

Patahuddin, S. M., Usman, H. B., & Ramful, A. (2018). Affordances from number lines in fractions instruction: Students' interpretation of teacher's intentions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(5), 909-928. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9800-z

Pesen, C. (2008). Kesirlerin sayı doğrusu üzerindeki gösteriminde öğrencilerin öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgıları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(15), 157-168.

Reece, C. S., & Kamii, C. (2001). The measurement of volume: why do young children measure inaccurately?. *School Science and Mathematics*, 101(7), 356-361. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb17969.x

Saymaz, C. B., & Argün, Z. (2022). Matematik Öğrenme Güçlüğüne Sahip Öğrencilerin Kesir Kavramına İlişkin Kavrayışlarının İncelenmesi. *Gazi Eğitim Bilimleri Dergisi,* 8(3), 333-369.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

Siebert, D., & Gaskin, N. (2006). Creating, naming, and justifying fractions. *Teaching Children Mathematics*, 12(8), 394-400.

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 13–19. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004.

Simon, M. A., Placa, N., Kara, M., & Avitzur, A. (2018). Empirically-based hypothetical learning trajectories for fraction concepts: Products of the Learning Through Activity research program. *Journal of Mathematical Behavior*, 52, 188-200.

Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. *Learning and Teaching Measurement*, 3-16.

Tan Şişman, G. & Aksu, M. (2009). Yedinci sınıf öğrencilerinin alan ve çevre konularındaki başarıları. *İlköğretim Online*, 8(1), 243-253.

Topçu, M. & Gürefe, N. (2020). 7. sınıf öğrencilerinin kesir şemalarının belirlenmesi. *The Journal of International Education Science, 22 (7*), 97-118.

Wijaya, A. (2017). The relationships between Indonesian fourth graders' difficulties in fractions and the opportunity to learn fractions: A snapshot of TIMSS results. *International Journal of Instruction*, 10(4), 221-236.

Wilkins, J. L. M., & Norton, A. (2018). Learning progression toward a measurement concept of fractions. International Journal of STEM Education, 5(27), 1-11.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2013). İlkokul ve ortaokul matematiği, gelişimsel yaklaşımla öğretim (S. Durmuş, Çev.). Ankara: Nobel.

Yakar, E. (2019). *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin ve matematiksel dil becerilerinin matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından incelenmesi,* Doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Zembat, İ. Ö. (2009). Ölçme Temel Bileşenleri ve Sık Karşılaşılan Kavram Yanılgıları., M. F. Özmantar, E. Bingölbali, (Editörler). *İlköğretimde Karşılaşılan Matematiksel Zorluklar ve Çözüm Önerileri*. Ankara: Pegem Akademi.

Zhang, X., Clements, M. A., & Ellerton, N. F. (2015). Conceptual mis (understandings) of fractions: From area models to multiple embodiments. *Mathematics Education Research Journal*, 27(2), 233-261. https://doi.org/10.1007/s13394-014-0133-8.